THE ABEL PRIZE 2020

Asymptotiske egenskaper for grupper

En populær familie av matematiske objekter er de såkalte Lie-gruppene, oppkalt etter den norske matematikeren Sophus Lie (1842 –1899). Lie-grupper beskriver symmetriene til geometriske objekter, som for eksempel rotasjonssymmetri i tre dimensjoner. Sophus Lie lot seg inspirere av tidligere arbeider av Niels Henrik Abel og Évariste Galois om løsninger av algebraiske ligninger. Abels bevis for at man ikke kan finne noen formel for løsningen av en generell femtegradslikning, og Galois' banebrytende teori for å koble løsninger av polynom-ligninger til automorfismegrupper av algebraiske kroppsutvidelser, er begge strålende eksempler på hvordan man kan forstå detaljene ved å utvide horisonten. Lies tanke var å introdusere tilsvarende teknikker for å studere symmetrier av differensiallikninger. Ettertiden har sett det som en viktig oppgave å prøve å forstå strukturen til disse Lie-gruppene, for på den måten å nærme seg løsningen av de underliggende differensialligningene.

En abstrakt gruppe er en mengde utstyrt med en binær operasjon som tilfredsstiller visse egenskaper, som assossiativitet og eksistens av inverser. Den binære operasjonen kan være addisjon, multiplikasjon eller sammensetting av elementer eller funksjoner, avhengig av hvilken gruppe vi har i tankene. Grupper kan ha endelig eller uendelig mange elementer, og de kan ha en ganske sammensatt struktur. Men grupper kan også ha en mer eller mindre triviell struktur, som den additiv gruppa $\{0\}$ med bare ett element. Andre eksempler på grupper er heltallene $\mathbb{Z}$ med vanlig addisjon som binær operasjon, mengden av invertible $n \times n$-matriser under multiplikasjon, eller mengden av symmetrier av en kube under komposisjon. Det siste eksemplet er faktisk den samme gruppa som mengden av permutasjoner av mengden $\{A, B, C, D\}$.

På samme måte som symmetrigruppen til en kube virker på hjørnene til kuben, kan en abstrakt gruppe virke på en vilkårlig mengde. Virkningen må gjenspeile den binære strukturen til gruppa, dvs. hvis $\rho_g(x)$ angir virkningen av gruppeelementet g på element $x \in X$, er det nødvendig at $\rho_{gg'}(x) = \rho_g(\rho_{g'}(x))$.

Atomene i gruppeuniverset er de simple gruppene. De simple endelige gruppene er fullstendig klassifisert gjennom arbeidet til et utall matematikere gjennom flere tiår, blant dem John Griggs Thompson. Thompson fikk Abelprisen i 2008 for dette arbeidet.

Grupper kan ha en tilleggsstruktur, kompatibel med den binære operasjonen til gruppa. Et eksempel er topologiske grupper, dvs. grupper som også er topologiske rom med kontinuerlig binær operasjon.
Et eksempel på en topologisk gruppe er sirkel-gruppen

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Gruppeoperasjonen er gitt ved addisjon av vinkler.

En viktig karakteristikk av en gruppe er størrelsen på gruppa. For endelige grupper kan vi telle elementene, men for uendelige grupper er det ikke så enkelt. Vi trenger mer sofistikerte mål, og vi fokuserer på to forskjellige egenskaper, amenabilitet og Kazhdans egenskap (T).

Vi skal definere amenabilitet via begrepet Følner-følge. En Følner-følge for en virkning av en gruppe G på en tellbar mengde X er en følge av endelige mengder som "utfyller" hele X og slik at virkningen på X "ikke flytter på for mye." Den presise definisjonen er som følger:

Definisjon. La G være en gruppe som virker på en tellbar mengde X. En Følner-følge for virkningen er en følge $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ av endelige delmengder av X slik at $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = X$ og slik at

$$\lim_{j \to \infty} \frac{|gF_j \,\Delta\, F_j|}{|F_j|} = 0$$

for alle $g \in G$ og hvor Δ betegner den symmetriske differansen, dvs. $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
En diskret telbar gruppe G er amenable hvis den inneholder minst en Følner-følge for virkningen av gruppa.

Et eksempel på en amenabel gruppe er heltallene $\mathbb{Z}$ under addisjon. Den har en Følner-følge $F_j = [-j, \dots, j]$ hvor unionen er hele $\mathbb{Z}$ og hvor

$$(z + F_j) \,\Delta\, F_j = [j+1, \dots, j+z] \cup [-j, \dots, -j+z]$$

har kardinalitet $2z$. Siden z er fiksert, vil grenseverdien for kvosienten med $|F_j| = 2j+1$ være 0.
En ekvivalent definisjon for tellbare diskrete grupper (etter J. Dixmier) er at det finnes en enhetsvektor ξ i $\ell^2(G)$ slik at $||g\xi - \xi||$ går mot 0 for hver $g \in G$. Vi sier at ξ er en nesten invariant vektor. Merk at endelige, oppløsbare og endelig-genererte grupper med polynomial vekst er amenable.
Vekstraten til en gruppe er et veldefinert begrep innen asymptotisk analyse. At en endelig-generert gruppe har polynomial vekst betyr at antall elementer av endelig lengde mindre enn n (relativt til en mengde av generatorer) er oppad begrenset av en polynomfunksjon $P(n)$. Vekstraten er da den minste graden av et slikt polynom P.

Den andre egenskapen vi skal betrakte er det som kalles Kazhdans egenskap (T).

Definisjon. La G være en lokal-kompakt gruppe og la $\rho : G \to U(H)$ være en unitær representasjon av G på et Hilbertrom H. For alle $\epsilon > 0$ og kompakte delmengder $S \subset G$ sier vi at en enhetsvektor $\xi \in H$ en (ϵ, S)-invariant dersom

$$||\rho(g)\xi - \xi|| < \epsilon \quad \forall g \in S$$

Vi sier at G har Kazhdans egenskap (T) dersom alle unitære representasjoner av G med en (ϵ, S)-invariant enhetsvektor for hvert tall $\epsilon > 0$ og for hver kompakte delmengde S, har en ikke-triviell invariant vektor.

Ved å bruke Dixmiers definisjon av amenabilitet kan vi se sammenhengen mellom de to egenskapene, Amenabilitet er ekvivalent med eksistensen av en (ϵ, S)-invariant enhetsvektor $\xi \in H$, og Kazhdans egenskap (T) sier at dersom gruppa G har en (ϵ, S)-invariant enhetsvektor for hver $\epsilon > 0$ og for hver delmengde S, så har den en ikke-triviell invariant vektor. Noen eksempler på grupper med egenskapen (T); Endelige grupper, kompakte topologiske grupper og simple reelle Lie-grupper av reell rang minst 2. Dette inkluderer de spesielle lienære gruppene $SL_n(\mathbb{R})$ for $n \geq 3$.
Vi har også eksempler på grupper som ikke har egenskapen (T); De additive gruppene av heltall $\mathbb{Z}$, eller av reelle tall $\mathbb{R}$, ikke-kompakte oppløsbare grupper, ikke-trivielle frie grupper og frie abelske grupper, og de spesielle lineæree gruppene $SL_2(\mathbb{Z})$ og $SL_2(\mathbb{R})$.
Vi kan illustrere teknikkene i dette matematiske universet ved å gi et bevis for at alle endelige grupper har egenskapen (T):

Bevis. La G være en endelig gruppe. La $\rho : G \to U(H)$ være en unitær representasjon av G som har en (ϵ, S)-invariant enhetsvektor ξ for hver delmengde $S \subset G$ og $\epsilon > 0$. Det er lett å se at vi kan anta

$$\sup_{s \in G} ||\rho(s)\xi - \xi|| < \sqrt{2}$$

Da følger det at

$$\begin{aligned}
1 - &\frac{||\rho(s)\xi - \xi||^2}{2} \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}\langle \rho(s)\xi - \xi, \rho(s)\xi - \xi \rangle \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}(\langle \rho(s)\xi, \rho(s)\xi \rangle + \langle -\xi, \rho(s)\xi \rangle \\
&\quad + \langle \rho(s)\xi, -\xi \rangle + \langle -\xi, -\xi \rangle) \\
&= \tfrac{1}{2}(\langle \xi, \rho(s)\xi \rangle + \langle \rho(s)\xi, \xi \rangle) \\
&= \Re\langle \rho(s)\xi, \xi \rangle > 0
\end{aligned}$$

La

$$\eta = \sum_{g \in G} \rho(g)\xi$$

Pr. konstruksjon er denne vektoren invariant. Den kan ikke være 0, siden

$$\Re\langle \eta, \xi \rangle \neq 0$$

ved argumentet over. Vi har dermed vist at en nesten-invariant vektor produserer en ikke-triviell invariant vektor. □

Vi skal også gi et bevis i et tilfelle der vi ha den motsatte konklusjonen; Gruppa $\mathbb{R}$ av reelle tall under addisjon tilfredsstiller ikke Kazhdans egenskap (T).

Bevis. La $\lambda : \mathbb{R} \to \ell^2(\mathbb{R})$ være den venstre-regulære representasjonen av $\mathbb{R}$, dvs. gitt ved

$$\lambda(t)f(x) = f(x-t)$$

La $Q \subset \mathbb{R}$ være en kompakt delmengde, oppad begrenset av M, og la $\epsilon > 0$ være et reelt tall. Betrakt intervallet $I = [a,b]$ i $\mathbb{R}$ slik at $b - a > \frac{2M}{\epsilon^2}$, og la

$$\xi = (b-a)^{-\frac{1}{2}}\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

hvor χ er den karakteristiske funksjonen til $[a,b]$. Da har vi

$$||\xi||^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi^2}{b-a} \, dx = 1$$

og ξ er en enhetsvektor. Videre har vi

$$\begin{aligned}(\lambda(t)\xi - \xi)^2 &= (\xi(x-t) - \xi(x))^2 \\ &= \frac{1}{b-a}(\chi_{[a,a+t]} + \chi_{[b,b+t]})\end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $|t| < b - a$. Derfor har vi

$$\begin{aligned}||\lambda(t)\xi - \xi||^2 &= \int_{\mathbb{R}} (\lambda(t)\xi - \xi)^2 \, dx \\ &= \frac{2|t|}{b-a} < \frac{2M}{b-a} < \epsilon^2\end{aligned}$$

Det følger at den regulære representasjonen nesten har invariantvektorer
På den annen side har ikke den regulære representasjonen noen invariante vektorer. Anta at den hadde det, dvs.

$$\lambda(t)f(x) = f(x-t) = f(x)$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Da ville f være konstant og ulik 0. Men det gir en motsigelse siden det ikke finnes ikke-negative konstant-funksjoner i $\ell^2(\mathbb{R})$. $\square$