



I'm Forever Blowing Bubbles ¹

I'm forever blowing bubbles,
Pretty bubbles in the air.
They fly so high,
Nearly reach the sky,
Then like my dreams,
They fade and die.

De har nærmest perfekt form og kan oppvise et fantastisk fargespill, forårsaket av lys som reflekteres i ulike retninger og fra flere forskjellige flater. Vi snakker om såpebobler, flortynne kuler som svever rundt i lufta helt til de plutselig forsvinner.

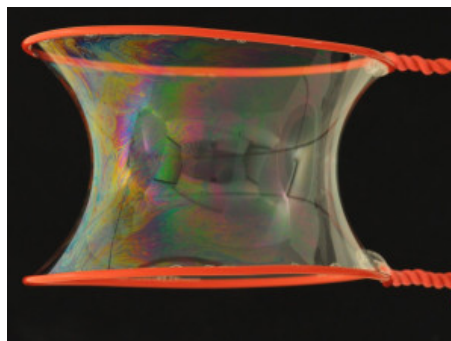
Såpebobler er fysiske eksempler på det som i matematikken kalles minimalflater. Luftinnholdet i en boble er bestemt fra starten av, og siden såpefilmen overalt på flaten forsøker å minimere overflatespenningen, vil nødvendigvis boblene ganske raskt danne en flate med minimalt areal i forhold til luftinnholdet. Det er velkjent at det er kuleflatene som har denne egenskapen.



Dersom vi i stedet for å blåse boblene, dypper en deformert ståltråd-ring ned i en såpeoppløsning, vil såpefilmen forme seg til en flate med ståltråden som rand og med minimalt areal. I motsetning til den kule-formede boblen som omslutter et bestemt luftvolum, vil denne filmen oppleve det samme

trykket på begge sider. Det fører til at middelkrumningen i hvert punkt på flaten, definert som gjennomsnittet av krumningene i alle retninger gjennom punktet, går mot 0. Selv om såpefilmen nærmest umiddelbart vil danne en minimalflate, er det svært vanskelig å regne seg fram til hvordan flaten vil se ut.

Blant alle kurver i planet som forbinder to gitte punkter, finnes det alltid en med minst lengde. Areal av flater har ikke den samme egenskapen. Når vi forsøker å redusere arealet til en flate mest mulig, kan det hende at flaten rett og slett kollapser. Et eksempel på dette er den minimale sylinder-formede flaten som forbinder to parallelle sirkler.



Kilde: Soapbubble.dk

Så lenge avstanden mellom sirklene er liten i forhold til radien i de to sirklene, vil den minimale flaten se ut som en litt konkav sylinder, den danner det som kalles en katenoide. Trekker vi sirklene lenger fra hverandre vil katenoiden stadig trekke seg mer sammen på midten. På et visst punkt vil flaten kollapse langs senterlinja mellom sirklene, rett og slett fordi det ikke finnes noen minimalflate som forbinder de to sirklene.

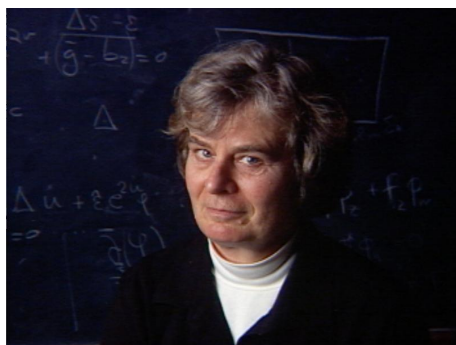
I 1968 avla Karen Uhlenbeck sin doktorgrad ved Brandies-universitetet med avhandlingen "The Calculus of Variations and Global Analysis". Veilederen hennes var Richard Palais, som noen år tidligere og sammen med Stephen Smale hadde introdusert den såkalte *Palais-Smale Condition C*-betingelsen. Condition C gir en betingelse for eksistens av minimale funksjoner for funksjonaler på funksjonsrom. "Minimale funksjoner for funksjonaler på funksjonsrom" er en mer generell formulering enn "finn flaten med

¹*I'm Forever Blowing Bubbles* er en amerikansk sang, hentet fra Broadway-musikalen *The Passing Show of 1918*. Den ble satt opp i 1918, det samme året som Hermann Weyl introduserte begrepet gauge teori. I tillegg til den opplagte sammenhengen med minimalflater, gir også teksten assosiasjoner til matematisk forskning generelt. Sangen er også kjent som supportersangen til fotballklubben West Ham.



minst areal”, men Condition C kan også anvendes på teorien for minimalflater. Men betingelsen er ikke nødvendigvis oppfylt i det tilfellet og kan derfor ikke brukes til å bevise eksistens av minimalflater. Karen Uhlenbeck ville gjerne forstå hva som skjer når Condition C ikke gjelder. I et fellesarbeid med Jonathan Sacks ga hun en detaljert beskrivelse av hva som skjer når en ikke kan basere seg på konklusjonen i Condition C. Uhlenbeck og Sachs konstruerte en følge av avbildninger som alle tilfredsstiller Condition C, uten at grense-avbildningen for følgen gjør det. Utenfor en endelig punktmengde på kuleflaten (de singulære punktene) fungerer alt som det skal, men nær de singulære punktene oppstår det noe som mest kan sammenliknes med små bobler. Arealet av grenseflaten er ekte mindre enn grensen av arealene til flatene i følgen. Forskjellen finner vi igjen som ”areal konsentrert i isolerte punkter”, eller eventuelt som arealet av de små boblene som dukker opp i følgen når denne nærmer seg sin grense.

Artiklen til Uhlenbeck og Sachs vakte stor oppsikt og ideene og metodene som beskrives har i ettertiden etablert seg som et viktig matematisk verktøy. Spesielt har ”boble-fenomenet” hatt stor betydning som en metode til å løse ulike matematiske problemer.



Karen Uhlenbeck, vinner av Abelprisen 2019