

III.

Et lidet Bidrag til Læren om adskillige
transcendente Functioner.

¶

Studiosus N. H. Abel.

I.) Vi vil betragte Integralet:

$$p = \int \frac{dx \cdot q}{x-a},$$

hvor q er en Function af x , der ikke indeholder a .

Differentieres p med Hensyn til a , saa faaer man:

$$\frac{dp}{da} = + \int \frac{dx \cdot q}{(x-a)^2}.$$

Dersom nu q er saaledes beskaffen, at $\int \frac{dx \cdot q}{x+a}$ kan reduceres til Integralet $\int \frac{dx \cdot q}{x-a}$, saa kan man faae en lineair Differentialaligning mellem p og a , hvoraf altsaa p kan findes som en Function af a . Paa denne Maade vil man altsaa erholde en Relation mellem flere Integraler, hvoraf nogle ere med Hensyn til x , andre med Hensyn til a .

Da dette giver Anledning til adskillige interessante Theoremer, saa vil jeg stræbe at udvikle disse i et meget udstrakt Tilfælde, i hvilket den omtalte Reduction af Integralet $\int \frac{dx \cdot q}{(x-a)^2}$ er muelig. Den kan nemlig altid gaae for sig, naar man har $q = \varphi x \cdot e^{fx}$, hvor fx er en algebraisk rational Function af x og:

$$\varphi x = k(x+\alpha)^\beta (x+\alpha')^{\beta'} (x+\alpha'')^{\beta''} \dots (x+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}$$

$\alpha, \alpha', \alpha''$ c. ere hvilke som helst constante Størrelser og β, β', β'' c. hvilke som helst rationale Tal.

Man har altsaa i dette Tilfælde:

$$p = \int \frac{dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{x-a}$$

$$\frac{dp}{da} = \int \frac{dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{(x-a)^2}.$$

2.) Dette sidste Integral kan reduceres paa to Maader.

a) Lad os differentiere Storrelsen

$$\frac{\varphi x \cdot e^{fx}}{x-a},$$

saa faaer man:

$$-\frac{dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{(x-a)^2} + \frac{dx \cdot (\varphi'x \cdot e^{fx} + \varphi x \cdot f'x \cdot e^{fx})}{x-a} = d\left(\frac{\varphi x \cdot e^{fx}}{x-a}\right).$$

Integrerer man her saaledes, at Integralerne forsvinde naar $x = c$, saa faaer man:

$$\int \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x-a)^2} = \frac{\varphi x \cdot e^{fx}}{a-x} - \frac{\varphi c \cdot e^{fc}}{a-c} + \int \frac{dx \cdot (\varphi'x + \varphi x \cdot f'x) \cdot e^{fx}}{x-a}.$$

Uf Værdien for φx faaer man ved at differentiere:

$$\varphi'x = \left(\frac{\beta}{x+\alpha} + \frac{\beta'}{x+\alpha'} + \frac{\beta''}{x+\alpha''} + \dots + \frac{\beta^{(n)}}{x+\alpha^{(n)}} \right) \cdot \varphi x = \sum \left(\frac{\beta^{(p)}}{x+\alpha^{(p)}} \right) \cdot \varphi x,$$

hvor Summationstegnet Σ udstrækker sig til Værdierne $p = 0, 1, 2, 3 \dots n$.

Deraf faaes:

$$\frac{\varphi'x}{x-a} = \sum \left(\frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(x-a)} \right) \cdot \varphi x.$$

Men som bekendt er

$$\frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(x-a)} = -\frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(a+\alpha^{(p)})} + \frac{\beta^{(p)}}{(a+\alpha^{(p)})(x-a)};$$

$$\text{altsaa } \frac{\varphi'x}{x-a} = -\varphi x \cdot \sum \frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(a+\alpha^{(p)})} + \frac{\varphi x}{x-a} \cdot \sum \frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}}.$$

Lad os nu betragte $\frac{f_x}{x-a}$. Da f_x er rational, saa har man:

$$f_x = \sum \gamma^{(p)} \cdot x^p + \sum \frac{\delta^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}}},$$

hvor Summationstegnet udstrækker sig til alle hele Værdier af p , og hvor $\mu^{(p)}$ er heelt Tal.

Differentieres, saa faaer man:

$$f_x = \sum p \gamma^{(p)} \cdot x^{p-1} - \mu^{(p)} \cdot \sum \frac{\delta^{(p)} \cdot \mu^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}};$$

$$\text{altsaa } \frac{f_x}{x-a} = \sum p \gamma^{(p)} \cdot \frac{x^{p-1}}{x-a} - \mu^{(p)} \cdot \sum \frac{\delta^{(p)} \cdot \mu^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}.$$

$$\text{Nu er } \frac{x^{p-1}}{x-a} = x^{p-2} + a \cdot x^{p-3} + \dots + a^{p'} \cdot x^{p-p'-2} + \dots + a^{p'-2} + \frac{a^{p-1}}{x-a};$$

$$\text{altsaa } \sum p \gamma^{(p)} \cdot \frac{x^{p-1}}{x-a} = \sum p \gamma^{(p)} \cdot a^{p'} \cdot x^{p-p'-2} + \frac{1}{x-a} \cdot \sum p \gamma^{(p)} \cdot a^{p-1},$$

hvor det første Summationstegn i den anden Side af Ligningen har Hensyn baade til p og p' .

For at reducere $\sum \frac{\delta^{(p)} \cdot \mu^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}$, lad os betragte:

$$\frac{1}{(x-a)(x+c)^m} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x+c} + \frac{A_2}{(x+c)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x+c)^m};$$

Multipliseres med $x-a$, og derpaa sættes $x = a$, saa faaer man:

$$A = \frac{1}{(a+c)^m}.$$

For at finde $A_{p'}$ multiplicere man med $(x+c)^m$ og differentiere $m-p'$ Gange, saa faaer man:

$$\frac{1}{x-a} = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x+c} + \dots + \frac{A_{p'-1}}{(x+c)^{p'-1}} \right) (x+c)^m + A_{p'} \cdot (x+c)^{m-p'}$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-p')}{(x-a)^{m-p'+1}} \cdot (-1)^{m-p'} = (x+c) \cdot R + (m-p') \dots 2 \cdot 1 \cdot A_{p'}$$

Sættes $x = -c$, saa faaer man:

$$A_{p'} = -\frac{1}{(a+c)^{m-p'+1}};$$

$$\text{altsaa } \frac{1}{(x-a)(x+c)^m} = \frac{1}{(a+c)^m(x-a)} - \sum \frac{1}{(a+c)^{m-p'+1} \cdot (x+c)^{p'}}.$$

Sættes istedet for $c, \varepsilon^{(p)}$; for $m, \mu^{(p)} + 1$, og multipliceres med $\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}$, saa faaer man:

$$\frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}} = \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1} \cdot (x-a)} - \sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2} \cdot (x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

Heraf faaes:

$$\sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}} = \frac{1}{x-a} \cdot \sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}} - \sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'} \cdot (a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}},$$

hvor det sidste Summationstegn har Hensyn baade til p og p' .

Indsættes denne Værdi og den før fundne for $\sum p \gamma^{(p)} \cdot \frac{x^{p-1}}{x-a}$ i Udtrykket for

$\frac{f_x}{x-a}$, saa faaer man:

$$\frac{f'_x}{x-a} = \frac{1}{x-a} \cdot \left(\sum p\gamma^{(p)} \cdot a^{p-1} + \sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}} \right) \\ + \sum p\gamma^{(p)} \cdot a^{p'} \cdot x^{p-p'-2} - \sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'} \cdot (a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}.$$

Multipliseres med φ_x og lægges Mærke til at Coefficienten af $\frac{1}{x-a}$ er æqual f'_a ,
 saa faaer man:

$$\frac{\varphi_x \cdot f'_x}{x-a} = \frac{\varphi_x \cdot f'_a}{x-a} + \varphi_x \cdot \sum p\gamma^{(p)} \cdot a^{p'} \cdot x^{p-p'-2} \\ - \varphi_x \cdot \sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'} \cdot (a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}.$$

Lægges hertil Værdien for $\frac{\varphi'_x}{x-a}$, multipliceres siden med $e^{fx} \cdot dx$ og integreres, saa faaer man:

$$\int \frac{dx \cdot (\varphi'_x + \varphi_x \cdot f'_x) \cdot e^{fx}}{x-a} = \left(f'_a + \frac{\varphi'_a}{\varphi_a} \right) \cdot \int \frac{dx \cdot \varphi_x \cdot e^{fx}}{x-a} \\ + \sum (p\gamma^{(p)} \cdot a^{p'} \cdot \int \varphi_x \cdot e^{fx} \cdot x^{p-p'-2} \cdot dx) - \sum \left(\frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}} \cdot \int \frac{\varphi_x \cdot dx \cdot e^{fx}}{x+\alpha^{(p)}} \right) \\ - \sum \left(\frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}} \cdot \int \frac{\varphi_x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}} \right).$$

Indsættes denne Værdie i Udtrykket for $\int \frac{\varphi_x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x-a)^2} = \frac{dp}{da}$, og sættes
 istedet for $\int \frac{dx \cdot \varphi_x \cdot e^{fx}}{x-a}$, p ; saa faaer man:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{da} - \left(f_a + \frac{\varphi'_a}{\varphi_a} \right) \cdot p &= - \frac{e^{fx} \cdot \varphi_x}{x-a} + \frac{e^{fc} \cdot \varphi_c}{c-a} \\
 &+ \sum (p \gamma^{(p)} \cdot a^{p'} \cdot \int \varphi_x \cdot e^{fx} \cdot x^{p-p'-2} \cdot dx) \\
 &- \sum \left(\frac{\beta^{(p)}}{a + \alpha^{(p)}} \cdot \int \frac{\varphi_x \cdot e^{fx} \cdot dx}{x + \alpha^{(p)}} \right) \\
 &- \sum \left(\frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(a + \epsilon^{(p)})^{\mu^{(p)} - p' + 2}} \cdot \int \frac{\varphi_x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x + \epsilon^{(p)})^{p'}} \right).
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\frac{dp}{da}} \right\} \dots (1)$$

b) Jeg kommer nu til den anden Reductionsmaade; men da denne, naar fx har sin almindelige Bærdie, er temmelig indviklet og vidløftig, saa vil jeg blot betragte det Tilfælde, hvor fx er en heel algebræisk Function af x . Man har altsaa $fx = \sum \gamma^{(p)} \cdot x^p$.

Differentieres Udtrykket

$$\frac{\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{x-a},$$

hvor $\psi x = (x + \alpha)(x + \alpha') \dots (x + \alpha^n)$;

saa faaer man:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x-a)^2} + \frac{\left(\psi' x + \psi x \cdot \left(\frac{\varphi' x}{\varphi x} + f_x \right) \right) \cdot \varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{x-a} \\
 & = d \left(\frac{\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{x-a} \right).
 \end{aligned}$$

For at reducere dette Udtryk, saa lad os betragte

$$\frac{F_x}{x-a} = \frac{F + F'x + \frac{F''}{2} \cdot x^2 + \frac{F'''}{2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots + \frac{F^m}{2 \cdot 3 \dots m} \cdot x^m}{x-a},$$

hvor F, F', F'' &c. betegne de Bærdier, som F_x, F'_x, F''_x &c. faaer, naar man sætter $x = 0$.

Man har altsaa:

$$\frac{F_x}{x-a} = \sum \frac{F^{(p)}}{1 \cdot 2 \dots p} \cdot \frac{x^p}{x-a} = \sum \frac{F^{(p)}}{1 \cdot 2 \dots p} \cdot a^p + \sum \frac{F^{(p)}}{1 \cdot 2 \dots p} \cdot a^{p'} \cdot x^{p-p'-1}$$

og naar man lægger Mærke til at $\sum \frac{F^{(p)}}{1 \cdot 2 \dots p} \cdot a^p = Fa$

$$\frac{F_x}{x-a} = \frac{Fa}{x-a} + \sum \frac{F^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+1)} \cdot a^{p'} \cdot x^p$$

naar man istedet for p sætter $p+p'+1$.

Differentieres denne Formel med Hensyn til a , saa faaer man:

$$\frac{F_x}{(x-a)^2} = \frac{Fa}{(x-a)^2} + \frac{F'a}{x-a} + \sum \frac{p' F^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+1)} \cdot a^{p'-1} \cdot x^p.$$

Sættes i denne Formel $F_x = \psi_x$, saa faaer man:

$$\frac{\psi_x}{(x-a)^2} = \frac{\psi_a}{(x-a)^2} + \frac{\psi'a}{x-a} + \sum \frac{(p'+1) \cdot F^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+2)} \cdot a^{p'} \cdot x^p.$$

Sættes i den første Formel istedet for F_x den hele Function:

$$\psi'_x + \psi_x \cdot \left(\frac{\varphi'_x}{\varphi_x} + f'_x \right), \text{ saa faaer man:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\psi'_x + \psi_x \cdot \left(\frac{\varphi'_x}{\varphi_x} + f'_x \right)}{x-a} &= \frac{\psi'a + \psi_a \cdot \left(\frac{\varphi'_a}{\varphi_a} + f'_a \right)}{x-a} \\ &+ \sum \frac{\psi^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+1)} \cdot a^{p'} \cdot x^p \\ &+ \sum \frac{\left(\psi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + f' \right)^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+1)} \cdot a^{p'} \cdot x^p. \end{aligned}$$

Det fgl. norske Vidsskabsk. Skr. i det 19de Aarh. 2. B. 2. H.

Na

Indsættes denne og den for $\frac{\psi x}{(x-a)^2}$ fundne Værdie i Udtrykket for

$d\left(\frac{\varphi x \cdot \psi x \cdot e^{fx}}{x-a}\right)$, saa faaer man:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{x-a}\right) = & -\psi a \cdot \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x-a)^2} + \psi a \cdot \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f a\right) \cdot \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{x-a} \\ & + \sum \frac{(p+1) \cdot F^{(p+p'+2)} \cdot \varphi x \cdot dx \cdot e^{fx}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+2)} \cdot a^{p'} \cdot x^p \\ & + \sum \frac{\left(\psi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + f\right)^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+1)} \cdot a^{p'} \cdot x^p \cdot dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}. \end{aligned}$$

Integrerer man denne Ligning, dividerer med ψa , og sætter istedet for

$\int \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{x-a}$ p, og for $\int \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x-a)^2}$ $\frac{dp}{da}$, saa faaer man:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{da} - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f a\right) \cdot p = & \frac{\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{\psi a \cdot (a-x)} - \frac{\psi c \cdot \varphi c \cdot e^{fc}}{\psi a \cdot (a-c)} \\ & + \sum \frac{(p+1) \cdot \psi^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+2)} \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot x^p \cdot dx \cdot \psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{\psi a} \\ & + \sum \frac{\left(\psi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + f\right)^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+1)} \cdot \frac{a^{p'}}{\psi a} \cdot \int \varphi x \cdot \psi x \cdot e^{fx} \cdot x^p \cdot dx, \end{aligned}$$

$$\text{eller: } \left. \begin{aligned} \frac{dp}{da} - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f a\right) \cdot p = & \frac{\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{\psi a \cdot (a-x)} - \frac{\psi c \cdot \varphi c \cdot e^{fc}}{\psi a \cdot (a-c)} \\ & + \sum \varphi(p, p') \cdot \frac{a^{p'}}{\psi a} \cdot \int \psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx} \cdot x^p \cdot dx, \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

$$\text{hvor } \varphi(p, p') = \frac{(p+1) \cdot \psi^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+2)} + \frac{\left(\psi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + f\right)^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+1)}.$$

3. De fundne Ligninger (1) og (2) kan meget simpelt integreres ved at multiplicere dem med Factoren $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}$. Gjør man dette og integrerer, saa faaer man, ved at lægge Mærke til at $\int \left(dp - \left(\frac{\varphi'a}{\varphi a} + f'a \right) \cdot p da \right) \cdot \frac{e^{-fa}}{\varphi a} = \frac{p \cdot e^{-fa}}{\varphi a}$, følgende to Formler:

$$\begin{aligned} \frac{p \cdot e^{-fa}}{\varphi a} &= e^{fx} \cdot \varphi x \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\varphi a \cdot (a-x)} - e^{fc} \cdot \varphi c \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\varphi a \cdot (a-c)} \\ &+ \sum \gamma^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^{p-p'-2} \cdot dx \\ &- \sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\varphi a \cdot (a+\alpha^{(p)})} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(p)}} \\ &- \sum \mu^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\varphi a \cdot (a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p+2}} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}} + C(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p \cdot e^{-fa}}{\varphi a} &= e^{fx} \cdot \psi x \cdot \varphi x \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\psi a \cdot \varphi a \cdot (a-x)} \\ &- e^{fc} \cdot \psi c \cdot \varphi c \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\psi a \cdot \varphi a \cdot (a-c)} \\ &+ \sum \varphi(p, p') \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\psi a \cdot \varphi a} \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^p \cdot dx + C(x). \end{aligned}$$

Da c er vilkaarlig, saa ville vi antage at $e^{fc} \cdot \varphi c = 0$ i den første Formel, og $e^{fc} \cdot \psi c \cdot \varphi c$ i den anden. Antages endvidere at Integralerne med Hensyn til a forsvinde naar $\frac{e^{-fa}}{\varphi a} = 0$, saa seer man let at $C(x) = 0$, og man faaer altsaa ved at indsette Værdien for $p = \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a}$:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{e^{-fa}}{\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot \varphi x \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a-x) \cdot \varphi a} \\
& = \sum \gamma^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^{p-p'-2} \cdot dx \\
& \quad - \sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\varphi a \cdot (a+\alpha^{(p)})} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(p)}} \\
& \quad - \sum \mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\varphi a \cdot (a+\varepsilon^{(p)})^{u^{(p)}-p'+2}} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^p}
\end{aligned} \right\} \dots (3) \\
& \left. \begin{aligned}
& \frac{e^{-fa}}{\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot \psi x \cdot \varphi x \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\psi a \cdot \varphi a \cdot (a-x)} \\
& = \sum \varphi^{(p,p')} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\psi a \cdot \varphi a} \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^{p'} \cdot dx
\end{aligned} \right\} \dots (4)
\end{aligned}$$

Hvis fx er en heel Function i den første af disse Formler, saa har man $\delta^{(p)} = 0$, og altsaa

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{e^{-fa}}{\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot \varphi x \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a-x) \cdot \varphi a} \\
& = \sum (p+p'+2) \gamma^{(p+p'+2)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^p \cdot dx \\
& \quad - \sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{\varphi a \cdot (a+\alpha^{(p)})} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(p)}}
\end{aligned} \right\} \dots (5)
\end{aligned}$$

4.) Jeg vil nu vise Anvendelsen af disse almindelige Formler paa flere specielle Tilfælde.

a) Antages $\varphi a = 1$, saa faaer man af Formelen (3):

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-fa}}{\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{a-x} \\ &= \sum p \gamma^{(p)} \cdot \int e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^{p-p'-2} \cdot dx \\ & \quad - \sum \mu^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'-2}} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}. \end{aligned}$$

Er f_x en heel Function, saa har man $\delta^{(p)} = 0$, og altsaa bliver Formelen i dette Tilfælde:

$$\left. \begin{aligned} & e^{-fa} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{a-x} \\ &= \sum (p+p'+2) \gamma^{(p)} \cdot \int e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^p \cdot dx. \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Udvikles det sidste Led i denne Ligning, saa faaer man:

$$\begin{aligned} & e^{-fa} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{a-x} = \\ & 2\gamma^{(2)} \cdot \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx \\ & + 3\gamma^{(3)} \cdot (\int e^{-fa} \cdot a \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x \cdot dx) \\ & + 4\gamma^{(4)} \cdot (\int e^{-fa} \cdot a^2 \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot a \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x \cdot dx \\ & \quad + \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^2 \cdot dx) \\ & + 5\gamma^{(5)} \cdot (\int e^{-fa} \cdot a^3 \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot a^2 \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x \cdot dx \\ & \quad + \int e^{-fa} \cdot a \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^2 \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^3 \cdot dx) \\ & + \\ & \vdots \\ & + n\gamma^{(n)} \cdot (\int e^{-fa} \cdot a^{n-2} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot a^{n-3} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x \cdot dx \\ & \quad + \dots + \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^{n-2} \cdot dx). \end{aligned}$$

Er f. Ex. $fx = x^n$, saa er $\gamma = \gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = \gamma^{(3)} = \dots = \gamma^{(n+1)} = 0$, $\gamma^{(n)} = 1$; altsaa bliver ovenstaaende Formel i dette Tilfælde:

$$e^{-fa^n} \cdot \int \frac{e^{x^n} \cdot dx}{x-a} - e^{x^n} \cdot \int \frac{e^{-a^n} \cdot da}{a-x} =$$

$$n(\int e^{-a^n} \cdot a^{n-2} \cdot da \cdot \int e^{x^n} \cdot dx + \int e^{-a^n} \cdot a^{n-3} \cdot da \cdot \int e^{x^n} \cdot x \cdot dx + \dots$$

$$+ \int e^{-a^n} \cdot da \cdot \int e^{x^n} \cdot x^{n-2} \cdot dx);$$

f. Ex. naar $n = 2, 3$:

$$e^{-a^2} \cdot \int \frac{e^{x^2} \cdot dx}{x-a} - e^{x^2} \cdot \int \frac{e^{-a^2} \cdot da}{a-x} = 2 \cdot \int e^{-a^2} \cdot da \cdot \int e^{x^2} \cdot dx,$$

$$e^{-a^3} \cdot \int \frac{e^{x^3} \cdot dx}{x-a} - e^{x^3} \cdot \int \frac{e^{-a^3} \cdot da}{a-x} =$$

$$3 \cdot \int e^{-a^3} \cdot da \cdot \int e^{x^3} \cdot x \cdot dx + 3 \cdot \int e^{-a^3} \cdot a \cdot da \cdot \int e^{x^3} \cdot dx.$$

b) Lad os nu antage at $fx = 0$ i Formelen (3), saa faaer man:

$$\left. \begin{aligned} \varphi x \cdot \int \frac{da}{(a-x) \cdot \varphi a} - \frac{1}{\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x-a} = \\ \sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{da}{(a+\alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(p)}} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

eller naar det sidste Led udvickles:

$$\varphi x \cdot \int \frac{da}{(a-x) \cdot \varphi a} - \frac{1}{\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x-a} =$$

$$\beta \cdot \int \frac{da}{(a+\alpha) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+\alpha} + \beta' \cdot \int \frac{da}{(a+\alpha') \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+\alpha'} + \dots$$

$$+ \beta^{(n)} \cdot \int \frac{da}{(a+\alpha^{(n)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(n)}},$$

hvor man maa erindre at

$$\varphi x = (x+\alpha)^{\beta} \cdot (x+\alpha')^{\beta'} \cdot (x+\alpha'')^{\beta''} \dots (x+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}$$

$$\varphi a = (a+\alpha)^{\beta} \cdot (a+\alpha')^{\beta'} \cdot (a+\alpha'')^{\beta''} \dots (a+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}.$$

c) Sættes $fx = 0$ i Formelen (4), saa faaer man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x-a} - \psi x \cdot \varphi x \cdot \int \frac{da}{(a-x) \cdot \psi a \cdot \varphi a} = \\ \sum \varphi(p \cdot p') \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{\psi a \cdot \varphi a} \cdot \int \varphi x \cdot x^{p'} \cdot dx \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

$$\text{hvor } \varphi(p \cdot p') = \frac{(p+1) \cdot \psi^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+2)} + \frac{\left(\psi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+1)}$$

$$\psi x = (x+\alpha) \cdot (x+\alpha') \cdot (x+\alpha'') \dots (x+\alpha^{(n)}).$$

d) Antages $\beta = \beta' = \beta'' \dots = \beta^{(n)} = m$, saa har man:

$$\varphi x = (\psi x)^m, \quad \varphi x \cdot \psi x = (\psi x)^{m+1}$$

$$\varphi' x = m(\psi x)^{m-1} \cdot \psi' x; \quad \frac{\psi x \cdot \varphi' x}{\varphi x} = m \psi' x$$

$$\left(\psi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{(p+p'+1)} = m \cdot \psi^{(p+p'+2)};$$

$$\text{altsaa: } \varphi(p \cdot p') = \frac{((p+1) + m(p+p'+2)) \cdot \psi^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+2)}$$

$$= (p+1+m(p+p'+2)) \cdot k^{(p+p'+2)}$$

$$\text{naar } \psi x \text{ sættes} = k + k^{(1)} \cdot x + k^{(2)} \cdot x^2 + \dots + k^{(n)} \cdot x^{(n)}.$$

Indsættes disse Værdier, saa faaer man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(\psi a)^m} \cdot \int \frac{\psi x \cdot dx}{x-a} - (\psi x)^{m+1} \cdot \int \frac{da}{(a-x) \cdot (\psi a)^{m+1}} = \\ \sum k^{(p+p'+2)} \cdot (p+1+m(p+p'+2)) \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{(\psi a)^{m+1}} \cdot \int (\psi x)^m \cdot x^p \cdot dx \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

Det Tilfælde, i hvilket $m = -\frac{1}{2}$, er mærkværdigt derved at da faae Integralerne med Hensyn til x og a samme Form; man faaer nemlig da

$(\psi a)^{m+1} = (\psi a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\psi a}$, $\frac{1}{(\psi a)^m} = \sqrt{\psi a}$, og altsaa

$$\sqrt{\psi a} \cdot \int \frac{dx}{(x-a) \cdot \sqrt{\psi x}} - \sqrt{\psi x} \cdot \int \frac{da}{(a-x) \cdot \sqrt{\psi a}} = \\ \frac{1}{2} \sum (p-p') \cdot k(p+p'+2) \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{\sqrt{\psi a}} \cdot \int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{\psi x}}.$$

Lad os f. Ex. antage $\psi x = 1 + \alpha \cdot x^n$, saa er $k^{(n)} = \alpha$, $k^{(p+p'+2)}$ er lig nul, undtagen naar $p+p'+2 = n$, det er naar $p = n - p' - 2$, altsaa

$$\sqrt{1 + \alpha \cdot a^n} \cdot \int \frac{dx}{(x-a) \sqrt{1 + \alpha \cdot x^n}} - \sqrt{1 + \alpha \cdot x^n} \cdot \int \frac{da}{(a-x) \sqrt{1 + \alpha \cdot a^n}} \\ = \frac{\alpha}{2} \sum (n - 2p' - 2) \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{\sqrt{1 + \alpha \cdot a^n}} \cdot \int \frac{x^{n-p'-2} \cdot dx}{\sqrt{1 + \alpha \cdot x^n}}.$$

Udvikles det sidste Led, saa faaer man:

$$\sqrt{1 + \alpha \cdot a^n} \cdot \int \frac{dx}{(x-a) \sqrt{1 + \alpha \cdot x^n}} - \sqrt{1 + \alpha \cdot x^n} \cdot \int \frac{da}{(a-x) \sqrt{1 + \alpha \cdot a^n}} \\ = \frac{\alpha}{2} (n-2) \cdot \left(\int \frac{da}{\sqrt{1 + \alpha \cdot a^n}} \cdot \int \frac{x^{n-2} \cdot dx}{\sqrt{1 + \alpha \cdot x^n}} \right. \\ \left. - \int \frac{a^{n-2} \cdot da}{\sqrt{1 + \alpha \cdot a^n}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \alpha \cdot x^n}} \right) \\ + \frac{\alpha}{2} (n-4) \cdot \left(\int \frac{a \cdot da}{\sqrt{1 + \alpha \cdot a^n}} \cdot \int \frac{x^{n-3} \cdot dx}{\sqrt{1 + \alpha \cdot x^n}} \right. \\ \left. - \int \frac{a^{n-3} \cdot da}{\sqrt{1 + \alpha \cdot a^n}} \cdot \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1 + \alpha \cdot x^n}} \right) \\ + \frac{\alpha}{2} (n-6) \cdot \left(\int \frac{a^2 \cdot da}{\sqrt{1 + \alpha \cdot a^n}} \cdot \int \frac{x^{n-4} \cdot dx}{\sqrt{1 + \alpha \cdot x^n}} \right. \\ \left. - \int \frac{a^{n-4} \cdot da}{\sqrt{1 + \alpha \cdot a^n}} \cdot \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{1 + \alpha \cdot x^n}} \right) \\ + \text{u.}$$

Er f. Er. $n = 3$, saa faaer man;

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1+\alpha \cdot a^3)} \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1+\alpha \cdot x^3)}} \\ & - \sqrt{(1+\alpha \cdot x^3)} \cdot \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{(1+\alpha \cdot a^3)}} \\ & = \frac{\alpha}{2} \left(\int \frac{da}{\sqrt{(1+\alpha \cdot a^3)}} \cdot \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{(1+\alpha \cdot x^3)}} \right. \\ & \quad \left. - \int \frac{a \cdot da}{\sqrt{(1+\alpha \cdot a^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha \cdot x^3)}} \right). \end{aligned}$$

Som et andet Exempel vil jeg tage $\psi x = (1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2)$; Man har altsaa $k = 1$, $k^{(1)} = 0 = k^{(3)}$, $k^{(2)} = -(1+\alpha^2)$, $k^{(4)} = \alpha$. Formelen bliver altsaa, naar man forandrer a til $-a$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))} \cdot \int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))}} \\ & - \sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))} \cdot \int \frac{da}{(a+x)\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))}} \\ & = \alpha \cdot \int \frac{da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))}} \cdot \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))}} \\ & - \alpha \cdot \int \frac{a^2 \cdot da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))}}. \end{aligned}$$

Sættes $x = \sin \varphi$, og $a = \sin \psi$, saa er:

$$\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))} = \cos \varphi \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)},$$

$$\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))} = \cos \psi \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)}},$$

$$\frac{da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))}} = \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)}}.$$

Det Egl. norske Vidensk. Selsk. i det 19de Aarh. 2. B. 2. S.

$$\frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))}} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)}}$$

$$\frac{a^2 \cdot da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))}} = \frac{\sin^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)}}$$

Indsættes disse Værdier, saa faaer man:

$$\begin{aligned} & \cos \psi \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)} \cdot \int \frac{d\varphi}{(\sin \varphi + \sin \psi) \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)}} \\ & - \cos \varphi \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)} \cdot \int \frac{d\psi}{(\sin \psi + \sin \varphi) \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)}} \\ & = \alpha \cdot \int \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)}} \cdot \int \frac{\sin^2 \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)}} \\ & - \alpha \cdot \int \frac{\sin^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)}} \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)}}. \end{aligned}$$

Denne Formel svarer til den, som Legendre har fundet i sit Værk: Exercices de calcul intégral, Tom. I. pag. 136, hvorefter den kan uledes.

e) Sættes i Formelen (5) $fx = x$, saa faaer man:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{e^{-a}}{\varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a} - e^x \cdot \varphi x \cdot \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a-x) \cdot \varphi a} \\ & = - \sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot x \varphi \cdot dx}{x+\alpha^{(p)}} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

og naar man udvikler det sidste Led:

$$\begin{aligned} & e^x \cdot \varphi x \cdot \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a-x) \cdot \varphi a} - \frac{e^{-a}}{\varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a} \\ & = \beta \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx \cdot \varphi x}{x+\alpha} + \beta' \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha') \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha'} \\ & + \beta'' \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha'') \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha''} + \dots \beta^{(n)} \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha^{(n)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(n)}} \end{aligned}$$

§. Ex. naar $\varphi x = \sqrt{x^2 - 1}$, saa er $\beta = \beta' = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\alpha' = -1$;

$$\begin{aligned} \text{altsaa} \quad & e^x \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a-x) \cdot \sqrt{a^2 - 1}} \\ & - \frac{e^{-a}}{\sqrt{a^2 - 1}} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{x-a} \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+1) \cdot \sqrt{a^2 - 1}} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{x+1} \\ & + \frac{1}{2} \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a-1) \cdot \sqrt{a^2 - 1}} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{x-1} \dots \end{aligned}$$

f) Antages i Formelen (4) $\beta = \beta' = \beta'' = \dots \beta^{(n)} = m$, saa faaes
 $\varphi x = (\psi x)^m$, $\varphi x \cdot \psi x = (\psi x)^{m+1}$; altsaa:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{e^{-fa}}{(\psi a)^m} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot (\psi x)^m \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot (\psi x)^{m+1} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a-x)(\psi a)^{m+1}} \\ & = \sum \varphi(p, p') \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{(\psi a)^{m+1}} \cdot \int e^{fx} \cdot (\varphi x)^m \cdot x^p \cdot dx, \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

$$\begin{aligned} \text{hvor } \varphi(p, p') &= \frac{f^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+2)} \\ &+ (p+1+m(p+p'+2)) \cdot \frac{\psi^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+p'+2)}, \end{aligned}$$

$$\text{eller: } \varphi(p, p') = (p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} + (p+1+m(p+p'+2)) \cdot k^{(p+p'+2)},$$

$$\text{naar } fx = \gamma + \gamma^{(1)} \cdot x + \gamma^{(2)} \cdot x^2 + \dots \gamma^{(n)} \cdot x^n,$$

$$\text{og } \psi x = k + k^{(1)} \cdot x + k^{(2)} \cdot x^2 + \dots k^{(n)} \cdot x^n;$$

Man har altsaa:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{e^{-fa}}{(\psi a)^m} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot (\psi x)^m \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot (\psi x)^{m+1} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a-x) \cdot (\psi a)^{m+1}} \\ & = \sum ((p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} + p+1+m(p+p'+2) \cdot k^{(p+p'+2)}) \times \\ & \quad \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{(\psi a)^{m+1}} \cdot \int e^{fx} \cdot (\psi x)^m \cdot x^p \cdot dx. \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

Antages $m = -\frac{1}{2}$, saa faaer man:

$$\begin{aligned} & e^{-fa} \cdot \sqrt{\psi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{(x-a) \cdot \sqrt{\psi x}} - e^{fx} \cdot \sqrt{\psi x} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a-x) \cdot \sqrt{\psi a}} \\ & = \sum ((p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} + \frac{1}{2}(p-p') \cdot k^{(p+p'+2)}) \times \\ & \quad \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\sqrt{\psi a}} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot x^p \cdot dx}{\sqrt{\psi x}}. \end{aligned}$$

Er f. Er. $fx = x$, og $\psi x = 1-x^2$, saa faaer man:

$$\gamma^{(p+p'+2)} = 0, \quad \frac{1}{2}(p-p') \cdot k^{(p+p'+2)} = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{altsaa:} \quad & e^{-a} \cdot \sqrt{1-a^2} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx}{(x-a) \cdot \sqrt{1-x^2}} \\ & = e^x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a-x) \cdot \sqrt{1-a^2}}. \end{aligned}$$

Seettes istedet for $a - a$, saa faaer man:

$$\begin{aligned} & e^a \cdot \sqrt{1-a^2} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx}{(x+a) \cdot \sqrt{1-x^2}} \\ & = e^x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \int \frac{e^a \cdot da}{(a+x) \cdot \sqrt{1-a^2}}. \end{aligned}$$

Sættes $x = \sin \varphi$, og $a = \sin \psi$, saa faaer man:

$$\cos \psi \cdot e^{\sin \psi} \cdot \int \frac{e^{\sin \varphi} \cdot d\varphi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \cos \varphi \cdot e^{\sin \varphi} \cdot \int \frac{e^{\sin \psi} \cdot d\psi}{\sin \psi + \sin \varphi},$$

hvor Integralerne tages fra $\varphi = \psi = \frac{\pi}{2}$.

Seg gaaer nu over til at vise en anden Anvendelse af de almindelige Ligninger. Hidindtil have vi betragtet x og a uden Hensyn til bestemte Værdier som de kunne have, hvorved de almindelige Formler vilde blive simplere; vi ville nu søge saadanne Værdier. Lad os først betragte Ligningen (3). Den første Side af denne Ligning indeholder to Integraler, men da enhver af dem er multipliceret med en Størrelse, den ene afhængig af x og den anden af a , saa maa man kunne give disse Størrelser saadan en Værdi, at enten eet eller begge Integraler forsvinde, forudsat at hver af Ligningerne $\frac{e^{-fa}}{\varphi a} = 0$, $e^{fx} \cdot \varphi x = 0$ har idetmindste to forskellige Rødder; thi have vi antaget, at Integralerne ere tagne fra saadanne Værdier for x og a , der gjøre disse Ligninger $= 0$.

Lad os først antage $e^{fx} \cdot \varphi x = 0$, saa faaer man efter at have multipliceret med $e^{fa} \cdot \varphi a$:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a} &= e^{fa} \cdot \varphi a \cdot \sum (p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} \\ &\times \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^p \cdot dx \\ &- e^{fa} \cdot \varphi a \cdot \sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a+\alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(p)}} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

($x = x'$, $x = x''$, $a = a'$).

Størrelserne mellem Parenthesen angiver mellem hvilke Grændser Integralerne skal tages, og de maae være saaledes, at

$$e^{fx'} \cdot \varphi x' = 0, \quad e^{fx''} \cdot \varphi x'' = 0, \quad \frac{e^{-fa'}}{\varphi a'} = 0.$$

Af den foregaaende Formel følger følgende Theorem:

„Værdien af Integralet: $\int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a}$ mellem to saadanne Grændser, der gjøre $e^{fx} \cdot \varphi x = 0$, lader sig udtrykke ved Integraler af følgende Formler:

$\int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^p \cdot dx, \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{qa}, \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x+a^{(p)}}, \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a+a^{(p)}) \cdot qa},$
 „hvor Integralerne med Hensyn til x ere tagne mellem de samme Grændser som det første Integral.“

Dette Theorem er mærkvoerdigt derved, at den samme Reduction er absolut umuelig, naar Integralet $\int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a}$ tages mellem hvilket som helst Værdier af x .

Antages $fx = 0$, saa faaer man:

$$\int \frac{\varphi x \cdot dx}{x-a} = -qa \cdot \sum \rho^{(p)} \cdot \int \frac{da}{(a+a^{(p)}) \cdot qa} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+a^{(p)}} \dots (14)$$

($x = x', \quad x = x'', \quad a = a'$).

Antages derimod $\varphi x = 1$, saa faaer man:

$$\int \frac{e^{fx} \cdot dx}{x-a} = e^{fa} \cdot \sum (p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} \left. \begin{array}{l} \times \int e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da \\ \times \int e^{fx} \cdot x^p \cdot dx. \end{array} \right\} \dots (15)$$

($x = x', \quad x = x'', \quad a = a'$).

Lad os nu tillige antage at man giver a saadan en Værdie, at $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}$ bliver $= 0$,
og lad a'' være denne Værdie, saa faaer man:

$$\left. \begin{aligned} & \sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a + \alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx \cdot \varphi x}{x + \alpha^{(p)}} \\ & = \sum (p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^p \cdot dx \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

($x = x'$, $x = x''$; $a = a'$, $a = a''$).

Sættes $fx = kx$, saa har man:

$$\sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-ka} \cdot da}{(a + \alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^{kx} \cdot dx \cdot \varphi x}{x + \alpha^{(p)}} = 0. \dots (17)$$

($x = x'$, $x = x''$; $a = a'$, $a = a''$).

Sættes $k = 0$, saa har man ogsaa:

$$\sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{da}{(a + \alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x + \alpha^{(p)}} = 0. \dots (18)$$

($x = x'$, $x = x''$; $a = a'$, $a = a''$).

Lad os f. Ex. antage $\varphi x = \sqrt{(x^2 - 1)} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$, saa har man:

$$\beta = \beta' = \frac{1}{2}, \quad x' = 1, \quad x'' = -1, \quad a' = \infty, \quad a'' = -\infty,$$

$$\alpha = -1, \quad \alpha' = 1;$$

altsaa:

$$\int \frac{da}{(a-1) \cdot \sqrt{(a^2-1)}} \cdot \int \frac{dx \cdot \sqrt{(x^2-1)}}{x-1}$$

$$+ \int \frac{da}{(a+1) \cdot \sqrt{(a^2-1)}} \cdot \int \frac{dx \cdot \sqrt{(x^2-1)}}{x+1} = 0;$$

($x' = 1$, $x'' = -1$), ($a' = +\infty$, $a'' = -\infty$);

hvilket ogsaa er rigtigt, da:

$$\int \frac{da}{(a-1) \cdot \sqrt{(a^2-1)}} = -Y\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = 0; \quad (a = \infty, a = -\infty)$$

$$\int \frac{da}{(a+1) \cdot \sqrt{(a^2-1)}} = -Y\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = 0. \quad (a = \infty, a = -\infty).$$

Sættes i (16) $\varphi_x = 1$, saa faaer man:

$$\sum (p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} \cdot \int e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi_x \cdot x^p \cdot dx = 0 \quad \dots (19)$$

$$(x = x', x = x'') \quad (a = a', a = a'').$$

Lad os nu betragte Formelen (4). Sættes $e^{fx} \cdot \psi_x \cdot \varphi_x = 0$, saa faaer man efter at have multipliceret med $e^{fa} \cdot \varphi_a$:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi_x \cdot dx}{x-a} &= e^{fa} \cdot \varphi_a \cdot \sum \varphi(p, p') \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\psi_a \cdot \varphi_a} \\ &\times \int e^{fx} \cdot \varphi_x \cdot x^p \cdot dx \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

$$(x = x', x = x''; a = a')$$

hvor $\psi_{x'} \cdot e^{fx'} \cdot \varphi_{x'} = \psi_{x''} \cdot e^{fx''} \cdot \varphi_{x''} = 0$, $\frac{e^{-fa'}}{\varphi_a'} = 0$.

Denne Formel lader sig med Ord udtrykke i følgende Theorem:

„Værdien af Integrallet $\int \frac{e^{fx} \cdot \varphi_x \cdot dx}{x-a}$ imellem to saadanne Værdier af x , der gjør $e^{fx} \cdot \varphi_x = 0$, lader sig udtrykke ved Integraler af Formerne: $\int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\psi_a \cdot \varphi_a}$ og $\int e^{fx} \cdot \varphi_x \cdot x^p \cdot dx$.”

Derimod er denne Reduction af $\int \frac{e^{fx} \cdot \varphi_x \cdot dx}{x-a}$ umuelig for en hvilken som helst Værdie af x .

Antages $\beta = \beta' = \beta'' = \dots \beta^{(n)} = m$, saa faaer man følgende Formel:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{e^{fx} \cdot (\varphi x)^m \cdot dx}{x-a} &= e^{fa} \cdot (\varphi a)^m \cdot \sum \varphi(p/p') \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{(\varphi a)^{m+1}} \\ &\quad \times \int e^{fx} \cdot (\varphi x)^m \cdot x^p \cdot dx \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

($x = x'$, $x = x''$, $a = a'$)

hvor $\varphi x = (x + a)(x + a')(x + a'') \dots (x + a^{(n)})$.

Antages endvidere $x = 0$, saa faaer man:

$$\int \frac{(\varphi x)^m \cdot dx}{x-a} = (\varphi a)^m \cdot \sum \varphi(p/p') \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{(\varphi a)^{m+1}} \cdot \int (\varphi x)^m \cdot x^p \cdot dx \dots (22)$$

($x = x'$, $x = x''$, $a = a'$).

Man har altsaa følgende Theorem, der kun er specielt Tilfælde af det foregaaende:

„Værdien af Integralet $\int \frac{(\varphi x)^m \cdot dx}{x-a}$ mellem to saadanne Værdier af x ;
 „der gjør $(\varphi x)^{m+1} = 0$, lader sig udtrykke ved Integraler af Formerne:
 „ $\int \frac{a^{p'} \cdot da}{(\varphi a)^{m+1}}$ og $\int (\varphi x)^m \cdot x^p \cdot dx$, naar φx er en heel algebraisk
 „Function af x .“

Sættes $m = -\frac{1}{2}$, saa faaer man:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a) \cdot \sqrt{\varphi x}} &= \frac{1}{2\sqrt{\varphi a}} \cdot \sum (p-p') \cdot k^{(p+p'+2)} \\ &\quad \times \int \frac{a^{p'} \cdot da}{\sqrt{\varphi a}} \cdot \int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{\varphi x}} \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

($x = x'$, $x = x''$, $a = a'$);

hvoraf følger følgende Theorem:

Det 4gl. norske Vidsskabsk. Skr. i det 19de Aarh. 2. B. 2. S.

6 c

„Værdien af Integralet $\int \frac{dx}{(x-a) \cdot \sqrt{(\varphi x)}}$ mellem to saadanne Grændser,

„der gjer $\varphi x = 0$, lader sig udtrykke ved Integraler af Formen $\int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{(\varphi x)}}$ „

Lad os f. Ex. antage $\varphi x = (1-x^2) \cdot (1-\alpha \cdot x^2)$, saa er $x' = 1$, $x' = -1$,
 $x' = +\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, $x' = -\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, $a' = 1$, -1 , $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, $-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$;

altsaa $\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))} \cdot \int \frac{dx}{(x+a) \cdot \sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))}}$

$$= \alpha \cdot \int \frac{da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))}} \cdot \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))}}$$

$$- \alpha \cdot \int \frac{a^2 \cdot da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))}};$$

$$(x = 1, x = -1, a = \pm 1, \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}})$$

$$(x = 1, x = \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, a = \pm 1, \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}})$$

$$(x = -1, x = \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, a = \pm 1, \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}})$$

$$(x = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, x = -\sqrt{\frac{1}{\alpha}}, a = \pm 1, \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}}).$$

Antages i Formelen (22) $\varphi x = 1-x^{2n}$, saa har man:

$$\int \frac{dx \cdot (1-x^{2n})^m}{x-a} = (1-a^{2n})^m \cdot \sum \varphi(p, p') \\ \times \int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{(1-a^{2n})^{m+1}};$$

$$(x = 1, x = -1, a = +1);$$

hvor $m+1$ maa være mindre end 1, det er $m < 0$,

$$\varphi(p, p') = (p+1+m(p+p'+2)) \cdot k^{(p+p'+2)};$$

Da $k^{(p+p'+2)}$ er $= 0$, undtagen naar $p+p'+2 = 2n$, saa har man $\varphi(p,p') = -(p+1+2nm)$, da nemlig $k^{(2n)} = -1$. Integralet $\int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m$ kan udtrykkes ved den bekjendte Function Γ . Man har nemlig:

$$\begin{aligned} & \int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m & (x=1, x=-1) \\ &= -\int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m & (x=0, x=1) \\ &+ \int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m & (x=0, x=-1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{men} \quad & \int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m & (x=0, x=-1) \\ &= (-1)^{p+1} \cdot \int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m & (x=0, x=1), \end{aligned}$$

hvilket indsees naar man istedet for x sætter $-x$.

Man har altsaa:

$$\begin{aligned} & \int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m & (x=1, x=-1) \\ &= ((-1)^{p+1}-1) \cdot \int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m \cdot dx & (x=0, x=1) \end{aligned}$$

altsaa, eftersom p er lige eller ulige:

$$\begin{aligned} & \int dx \cdot x^{2p} \cdot (1-x^{2n})^m & (x=1, x=-1) \\ &= -2 \cdot \int dx \cdot x^{2p} \cdot (1-x^{2n})^m & (x=0, x=1), \\ & \int dx \cdot x^{2p+1} \cdot (1-x^{2n})^m = 0 & (x=1, x=-1). \end{aligned}$$

Af Legendre Exercices de calcul intégral, Tome I. pag. 279, faaar man let:

$$\int dx \cdot x^{2p} \cdot (1-x^{2n})^m = \frac{\Gamma(m+1) \cdot \Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{2n \cdot \Gamma\left(m+1+\frac{1+2p}{2n}\right)} \quad (x=0, x=1);$$

$$\begin{aligned} \text{altsaa} \quad & \int dx \cdot x^{2p} \cdot (1-x^{2n})^m \quad (x=1, x=-1) \\ &= -\frac{\Gamma(m+1) \cdot \Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{n \cdot \Gamma\left(m+1+\frac{1+2p}{2n}\right)}. \end{aligned}$$

Indsættes denne Værdie, og man siden gjør $m=-m$, saa faaer man:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(1-x^{2n})^m} &= \frac{\Gamma(-m+1)}{n} \cdot \sum (2p+1-2mn) \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{\Gamma\left(-m+1+\frac{1+2p}{2n}\right)} \cdot \int \frac{a^{2n-2p-2} \cdot da}{(1-a^{2n})^{1-m}} \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

($x=1, x=-1, a=1$).

Sættes $m=\frac{1}{2}$, saa har man:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a) \cdot \sqrt{1-x^{2n}}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n} \cdot \sum (2p+1-n) \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+2p}{2n}\right)} \cdot \int \frac{a^{2n-2p-2} \cdot da}{\sqrt{1-a^{2n}}} \end{aligned}$$

($x=1, x=-1, a=1, a=a$).

§. Ex. naar $n=3$, saa har man:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x-a) \cdot \sqrt{1-x^6}} \quad (x=1, x=-1) \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot \int \frac{a^4 \cdot da}{\sqrt{1-a^6}} \\ & \quad + \frac{2}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \cdot \int \frac{a \cdot da}{\sqrt{1-a^6}} \end{aligned} \left\} \text{(fra } a=1\text{)}.$$

Nu er $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; indsættes denne Værdi, saa faaer man:

$$\int \frac{dx}{(x-a) \cdot \sqrt{(1-x^6)}} = -\frac{2}{3}\sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \cdot \int \frac{a^4 \cdot da}{\sqrt{(1-a^6)}} \\ + \frac{2}{3}\sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{3})} \cdot \int \frac{da}{\sqrt{(1-a^6)}} \\ (x=1, x=-1, a=1).$$

I det Foregaaende have vi antaget $\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx} = 0$; lad os nu tillige antage $\frac{e^{-fa}}{\varphi a} = 0$, og lad a'' være en Værdi af a som fyldestgjør denne Bestingelse. Ligningen (5) bliver i dette Tilfælde:

$$\sum \varphi(p, p') \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da \cdot e^{-fa}}{\psi a \cdot \varphi a} \cdot \int \varphi x \cdot e^{fx} \cdot x^p \cdot dx = 0 \quad \dots \quad (25) \\ (x = x', x = x'', a = a', a = a'').$$

Er $fx = 0$, saa har man:

$$\sum \varphi(p, p') \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{\psi a \cdot \varphi a} \cdot \int \varphi x \cdot x^p \cdot dx = 0 \quad \dots \quad (26) \\ (x = x', x = x'', a = a', a = a'').$$

Lad os antage at β, β', β'' ic. ere negative men mindre end 1, saa bliver $\psi x \cdot \varphi x = 0$, og $\frac{1}{\varphi a} = 0$, naar $a = -\alpha^{(q)}$ og $x = -\alpha^{(p)}$. Man har altsaa i dette Tilfælde:

$$\sum \varphi(p, p') \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{\psi a} \cdot \int \frac{x^p \cdot dx}{\varphi x} = 0 \quad \dots \quad (27) \\ (x = -\alpha^{(p)}, x = -\alpha^{(p')}, a = -\alpha^{(q)}, a = -\alpha^{(q')});$$

hvor $\varphi x = (x + \alpha)^\beta \cdot (x + \alpha')^{\beta'} \cdot (x + \alpha'')^{\beta''} \dots$

$\psi a = (a + \alpha)^{1-\beta} \cdot (a + \alpha')^{1-\beta'} \cdot (a + \alpha'')^{1-\beta''} \dots$

og hvor $\beta^{(p)}$ er mindre end 1.

Stattes $\beta = \beta' = \beta'' = \dots = \frac{1}{2}$, saa faaer man:

$$\sum (p-p') \cdot k^{(p+p'+2)} \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{\sqrt{(qa)}} \cdot \int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{(qx)}} = 0 \dots (28)$$

$$(x = -a^{(p)}, x = -a^{(p')}, a = -a^{(q)}, a = -a^{(q')}).$$

I denne Formel er

$$qx = (x+a) \cdot (x+a') \cdot (x+a'') \dots = k + k^{(1)} \cdot x + k^{(2)} \cdot x^2 + \dots$$

Antager man f. Ex. $qx = (1-x) \cdot (1+x) \cdot (1-cx) \cdot (1+cx)$,

saa er $a = 1$, $a' = -1$, $a'' = \frac{1}{c}$, $a''' = -\frac{1}{c}$,

$$\text{og } \int \frac{da}{\sqrt{((1-a^2) \cdot (1-c^2 \cdot a^2))}} \cdot \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}} = \\ \int \frac{a^2 \cdot da}{\sqrt{((1-a^2) \cdot (1-c^2 \cdot a^2))}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}}$$

$$(x=1, x=-1; a=1, a=-1) \quad (1)$$

$$(x=1, x=-1; a=1, a=\frac{1}{c}) \quad (2)$$

$$(x=1, x=-1; a=1, a=-\frac{1}{c}) \quad (3)$$

$$(x=1, x=-1; a=\frac{1}{c}, a=-\frac{1}{c}) \quad (4)$$

$$(x=1, x=\frac{1}{c}; a=1, a=\frac{1}{c}) \quad (5)$$

$$(x=1, x=\frac{1}{c}; a=1, a=-\frac{1}{c}) \quad (6)$$

$$(x=1, x=\frac{1}{c}; a=\frac{1}{c}, a=-\frac{1}{c}) \quad (7)$$

$$(x=\frac{1}{c}, x=-\frac{1}{c}; a=\frac{1}{c}, a=-\frac{1}{c}) \quad (8)$$

Lad os betegne $\int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}}$ (fra $x=0$) med $F(x)$

og $\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}}$ fra $(x=0)$ med $E(x)$;

Heraf følger at

$$\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}} (x=a, x=a') = E(a') - E(a)$$

$$\text{og } \int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}} (x=a, x=a') = F(a') - F(a).$$

Gjøres denne Substitution i den foregaaende Formel, saa vil man finde følgende Formel:

$$F(1) \cdot E\left(\frac{1}{c}\right) = E(1) \cdot F\left(\frac{1}{c}\right).$$

Man faaer ikke flere end denne ene, hvilken af de 8 Grændser man end bruger, naar undtages dem som ere identiske, nemlig den 1ste, 5te og 8de.

Laad os i Almindelighed betegne $\int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{(\varphi x)}}$ fra en hvilken som helst Grænse med $F(p, x)$, saa er

$$\int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{(\varphi x)}} (x=a, x=a') = F(p, a') - F(p, a).$$

Gjøres denne Substitution i Formelen (), saa faaer man den følgende:

$$\left. \begin{aligned} & \sum (p-p') \cdot k^{(p+p'+2)} \cdot F(p, a) \cdot F(p', a') \\ & + \sum (p-p') \cdot k^{(p+p'+2)} \cdot F(p, a'') \cdot F(p', a''') \\ & = \sum (p-p') \cdot k^{(p+p'+2)} \cdot F(p, a) \cdot F(p', a''') \\ & + \sum (p-p') \cdot k^{(p+p'+2)} \cdot F(p, a'') \cdot F(p', a') \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

Af denne Formel kan atter igjen udledes mange specielle eftersom man antager at φx er lige eller ulige, men for ikke at blive for vidtloftig vil jeg forbigaae dem.

Det maa lægges Mærke til at a, a', a'', a''' kan betyde hvilken som helst Række af Ligningen $\varphi x = 0$. Man kan ogsaa antage $a = a', a'' = a'''$.