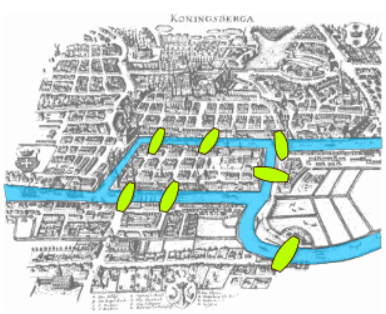
THE ABEL PRIZE 2021

Graf-invarianter

Byen Königsberg i Preussen (som senere skiftet navn til Kaliningrad og nå tilhører Russland) ligger ved bredden av Pregel-elven. I elven er det to store øyer, Kneiphof og Lomse. Øyene har bro-forbindelse med hverandre og med fastlandet på begge sider. Til sammen er det syv broer i byen, og et gammelt problem er å finne en rute gjennom byen som krysser hver av broene en og bare en gang.



Broproblemet ble løst i 1730 da den sveitsisk-russiske matematikeren Leonhard Euler beviste at det ikke kan eksistere noen slik rundtur. Men viktigere enn selve løsningen på Königsberg-problemet, var det faktum at Euler gjennom sin måte å angripe problemet på la grunnlaget for et nytt matematisk felt, i dag kjent som grafteori.

Grafteori kan betraktes som en abstrakt tilnærming til studiet av forholdet mellom objekter, med grafer som det grunnleggende begrepet.

Definisjon. En graf $G = (V, E)$ er et ordnet par bestående av

- en mengde av noder, V,
- en samling av kanter, E, mellom par av noder.

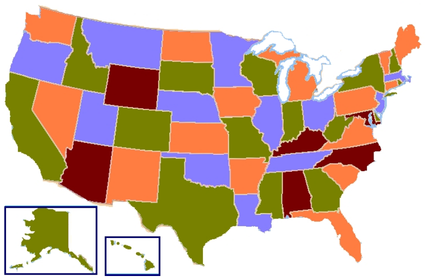
Nesten tre århundreder etter at Euler vandret over broene i Königsberg, har grafteorien vokst som matematisk disiplin og etter hvert funnet mange interessante anvendelser. Likevel finnes det fortsatt uløste problemer og nye spørsmål dukker stadig opp.

En grunnleggende utfordring innen mange felt av matematikken er ulike former for klassifikasjon. Grafteori er ikke noe unntak, selv om det ikke er åpenbart hva slags størrelser eller invarianter som skal brukes i klassifikasjonen. Men her er noen forslag.

Den første invarianten vi ser på er det kromatiske tallet til grafen:

Definisjon. La $G = (V, E)$ være en graf. Det kromatiske tallet $\gamma(G)$ til G er det minste antallet farger som trengs for å fargelegge nodene i grafen på en slik måte at ingen nabonoder har samme farge.

Det kromatiske tallet er et helt sentralt begrep i fire-farge-teoremet, bevist av Appel og Haken i 1976. Fire-farge-teoremet sier at det kromatiske tallet til en plan graf er fire. Teoremet er ekvivalent med det faktum at det er nok med fire farger for å fargelegge et kart under en tilsvarende betingelse; at naboregioner har forskjellig farge.



Kartet viser en fargelegging av USA med fire farger. Fire-farge-teoremet ville ikke lenger være sant dersom vi erstattet fire med tre. Det kan man overbevise seg om ved å studere et kart over Sør-Amerika, og fokusere på Bolivia og de 5 nabostatene.

En viktig karakteristikk av en graf er tettheten, dvs. antall kanter i grafen sammenlignet med det maksimale antall kanter som er mulig for en graf med tilsvarende antall noder. Ytterlighetene når det gjelder tetthet er på den ene side totalt usammenhengende grafer, uten noen kanter i det hele tatt, og på den andre siden komplette grafer, med en kant mellom ethvert par av noder. En komplett n-graf har dermed $\binom{n}{2}$ kanter.

La $G = (V, E)$ være en graf, og la $S \subset V$ være en vilkårlig delmengde av noder i G. Den induserte delgrafen $G[S]$ er en graf med S som sine noder og hvor $e \in E(G[S])$ dersom e er en kant i G og begge endepunktene til e ligger i S.

Den neste invarianten vi ser på er den maksimale klikkstørrelsen:

Definisjon. La G være en graf. En klikk i G er en komplett indusert delgraf av G. Antall noder i en maksimal klikk i G betegner vi med $\omega(G)$.

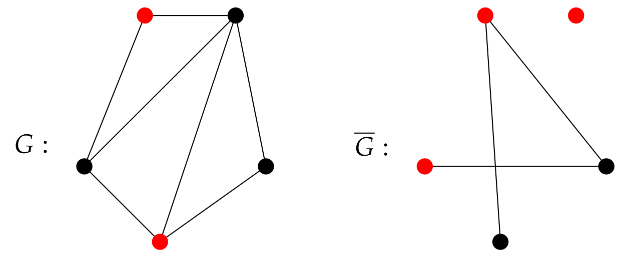
I en komplett graf er alle noder naboer til hverandre, og i en fargelegging må de derfor ha forskjellige farger. Det betyr at det kromatiske tallet til en komplett graf er det samme som antall noder i grafen og også den maksimale klikkstørrelsen. I en vilkårlig graf kan det kromatiske tallet være større enn den maksimale klikkstørrelsen; dvs. likheten reduseres til en ulikhet; $\omega(G) \leq \gamma(G)$.

Definisjon. En graf $G = (V, E)$ sies å være perfekt dersom for alle induserte delgrafer $S \subset G$ så er det kromatiske tallet og den maksimale klikkstørrelsen like, dvs. $\omega(G[S]) = \gamma(G[S])$.

I en artikkel fra 1972 formulerte og beviste årets Abelpris-vinner László Lovász det såkalte Perfekt graf-teoremet:

Teorem. En graf $G = (V, E)$ er perfekt hvis og bare hvis komplementgrafen $\overline{G}$ også er perfekt.

Komplementgrafen $\overline{G}$ har de samme nodene som G, mens kant-mengden er komplementær, dvs. at hvis $e \in E(G)$, så er $e \notin E(\overline{G})$ og vice versa. Følgende eksempel illustrerer perfekt graf-teoremet:



$\gamma(G) = \omega(G) = 3$ $\qquad$ $\gamma(\overline{G}) = \omega(\overline{G}) = 2$

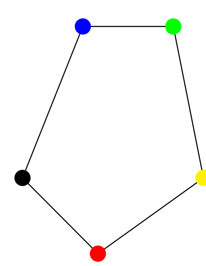
Neste graf-invariant vi ser på er uavhengighetstallet til grafen. En uavhengig delmengde i en graf er en mengde av noder uten noen innbyrdes kanter.

Definisjon. Uavhengighetstallet $\alpha(G)$ til en graf $G(V, E)$, er gitt ved kardinaliteten til den største uavhengige delmengden i G.

I illustrasjonen over danner de røde nodene i de to grafene uavhengige mengder av maksimal størrelse, dvs. $\alpha(G) = 2$, $\alpha(\overline{G}) = 3$. Invariantene i dette eksemplet bekrefter et generelt faktum, nemlig at den maksimale klikkstørrelsen til en graf er lik uavhengighetstallet til komplementgrafen $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Mot slutten av 1920-tallet presenterte de to elektronikk-ingeniørene Harry Nyquist og Ralph Hartley noen grunnleggende ideer knyttet til overføring av informasjon, spesielt knyttet opp mot telegrafen som kommunikasjonssystem. Noen år senere utviklet Claude Shannon begrepet kanalkapasitet, delvis basert på ideene til Nyquist og Hartley, og han fulgte også opp med en komplett teori for informasjonsoverføring.

Kanalkapasitet modellerer mengden av informasjon som kan overføres over en støyende kommunikasjonskanal der enkelte signalverdier kan forveksles med hverandre. Forvekslingen er kodet i forvekslingsgrafen, hvor de forskjellige signalene er representert som noder, og en mulig forveksling mellom to signaler er representert av en kant mellom de to tilhørende nodene.



I figuren over, den såkalte femkantsgrafen, kan det røde signalet forveksles med det svarte og det gule, men vil skille seg fra det blå og det grønne, osv. Kanalkapasiteten til grafen er minst 2, f.eks. representert av den uavhengige mengden {●, ●}. Hvis vi i stedet for enkle signaler bestemmer oss for å overføre signalpar, så har vi fem par hvor vi unngår forveksling, f.eks.

(●●) (●●) (●●) (●●) (●●)

Kanalkapasiteten måles pr. signal, og ved å bruke par, øker vi kapasiteten fra 2 til $\sqrt{5}$. Det var lenge ukjent om det var mulig å øke kapasiteten enda mer ved å bruke mer komplekse signalkombinasjoner, formulert matematisk på følgende måte:

Definisjon. La $G = (V, E)$ og $H = (W, F)$ være to grafer. Det sterke graf-produktet $G * H$ av G og H, er en graf gitt som følger:

i) Nodene i $G * H$ er mengden av par (g, h) med $g \in V$ og $h \in W$.

ii) Det er en kant mellom (g, h) og (g', h') dersom en av følgende er oppfyllt:

(a) $g = g'$ og $[h, h'] \in F$

(b) $h = h'$ og $[g, g'] \in E$

(c) $[g, g'] \in E$ og $[h, h'] \in F$

Iterasjon av produkt-konstruksjonen gir oss en multi-produkt graf $G_1 * G_2 * \cdots * G_k$.

Med denne definisjonen tilgjengelig kan vi introdusere Shannon-kapasitet, slik Claude Shannon gjorde det på 1940-tallet.

Definisjon. La $G = (V, E)$ være en graf og k et naturlig tall. Shannon-kapasiteten $\Theta(G)$ til G er definert ved

$$\Theta(G) = \lim_{k\to\infty} (\alpha(G * G * \cdots * G))^{\frac{1}{k}}$$

hvor $G * G * \cdots * G$ er produktet av k kopier av G.

Det er ikke lett å beregne Shannon-kapasiteten til en vilkårlig graf, og kompleksiteten til beregningene er heller ikke kjent. Shannon-kapasiteten til femkantgrafen ukjent i mange år, men i 1979 kunne Lovász endelig fastsatte verdien. Som et verktøy for å beregne denne introduserte Lovász en ny graf-invariant, kjent som Lovász-tallet.

Definisjon. La $G = (V, E)$ være en graf med n noder. En ordnet mengde av n enhetsvektorer $U = \{u_i \mid i \in V\} \subset \mathbb{R}^N$ kalles en ortonormal representasjon av G i $\mathbb{R}^N$, dersom u_i og u_j er ortogonale når i og j ikke er nabonoder i G, dvs.

$$u_i^T u_j = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } [i, j] \notin E \end{cases}$$

Definisjon. Lovász-tallet til grafen $G(V, E)$ er definert ved:

$$\theta(G) = \min_{c, U} \max_{i\in V} \frac{1}{(c^T u_i)^2}$$

hvor c er en enhetsvektor i $\mathbb{R}^N$ og U er en ortonormal representasjon av G i $\mathbb{R}^N$.

Lovász viste at Lovász-tallet $\theta(G)$ kan beregnes numerisk med høy presisjon i polynomiell tid. Han viste også det såkalte sandwichteoremet som relaterer den maksimale klikkstørrelsen, Lovász-tallet og det kromatiske tallet.

Teorem. For en graf $G = (V, E)$ har vi ulikhetene

$$\omega(G) \leq \theta(\overline{G}) \leq \gamma(G)$$

Lovász viste også at Lovász-tallet er en øvre grense for Shannon-kapasiteten, dvs.

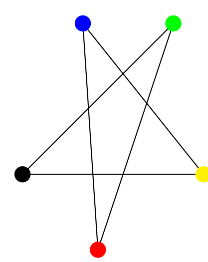
$$\alpha(G) \leq \Theta(G) \leq \theta(G)$$

hvor den venstre ulikheten er mer eller mindre opplagt. Ved å kombinere de to ulikhetene og å bruke at $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ får vi

$$\omega(\overline{G}) \leq \Theta(G) \leq \theta(G) \leq \gamma(\overline{G})$$

Det følger at for en perfekt graf G, hvor $\omega(G) = \gamma(G)$ og dermed også $\omega(\overline{G}) = \gamma(\overline{G})$ så vil ulikhetene over være likheter og Shannon-kapasiteten er lik Lovász-tallet.

Så hva med femkantgrafen P? Og komplementgrafen $\overline{P}$, gitt i figuren under?:



Komplementgrafen har kromatisk tall $\gamma(\overline{P}) = 3$ og maksimal klikkstørrelse $\omega(\overline{P}) = 2$. Dermed har vi

$$2 \leq \Theta(G) \leq \theta(G) \leq 3$$

Vi har allerede sett at $\sqrt{\alpha(P * P)} \geq \sqrt{5}$, noe som skviser ulikheten ned til intervallet

$$\sqrt{5} \leq \Theta(G) \leq \theta(G) \leq 3$$

Når vi så viser at Lovász-tallet til femkantgrafen, $\theta(P) \leq \sqrt{5}$, så det følger at

$$\Theta(G) = \theta(G) = \sqrt{5}$$

La $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ være mengden av enhetsvektorer i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$u_k = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_k \\ \sin\alpha\sin\beta_k \end{pmatrix}$$

hvor $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ og $\beta_k = \frac{2\pi k}{5}$. Da har vi

$$\begin{aligned} u_k \cdot u_\ell &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\cos\beta_k\cos\beta_\ell + \sin\beta_k\sin\beta_\ell) \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos(\beta_k - \beta_\ell) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} + (1 - \frac{1}{\sqrt{5}})\cos(\beta_k - \beta_\ell) \end{aligned}$$

Hvis $|k - \ell| = 2$ så er $\frac{2k\pi}{5} - \frac{2\ell\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ og $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}-1}$. Det betyr at

$$u_k \cdot u_\ell = \frac{1}{\sqrt{5}} + (1 - \frac{1}{\sqrt{5}})\frac{-1}{\sqrt{5}-1} = 0$$

og den ordnede mengden $U = \{u_i \mid i \in V(P)\} \subset \mathbb{R}^3$ danner en ortonormal representasjon av P i $\mathbb{R}^3$. La $c = (1, 0, 0)$. Lovász-tallet til P er da

$$\theta(P) = \min_{c,U} \max_{i\in V} \frac{1}{(c^T u_i)^2} \leq \max_{i\in V} \frac{1}{(c^T u_i)^2} = \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt[4]{5}})^2} = \sqrt{5}$$