IV.

Oplösning af et Par Opgaver ved Hjelp af bestemte Integraler.

Af

N. H. Abel.

I.

Det er som bekiendt ofte Tilfældet, at man ved Hjelp af bestemte Integraler (intégrales difinies) kan oplöse mange Opgaver, som man paa anden Maade enten aldeles ikke eller dog meget vanskelig kan oplöse, og især har man anvendt dem med Held paa Oplösningen af flere vanskelige Opgaver i Mechaniken, f. Ex. om Bevægelsen af en elastisk Flade, i Bolgetheorien &c. En anden Anvendelse af disse Integraler vil jeg vise i Oplösningen af fölgende Opgave:

"Lad CB Tavle I, Fig. 4, være en horizontal Linie, A et "givet Punkt; AB lodret paa BC, AM en krum Linie, "hvis retvinklede Koordinater ere $AP = x$, $PM = y$. "Endvidere være $AB = a$ og $KM = s$. Tænker man "sig at et Legeme gjennemlöber Buen CA med en

"Initial-Hastighed $=o$, saa vil Tiden T, som det bruger til at gjennemlöbe hele Buen CA, være afhængig af Kurvens Natur og af a. Man forlanger at "bestemme den krumme Linie KCA saaledes, at Tiden T bliver lig en given Funktion af a, f. Ex. ψa."

Som bekjendt er, naar Hastigheden af Legemet i M kaldes h og Tiden, som det bruger til at gjennemlöbe Buen CM, t

$$h = \sqrt{BP} = \sqrt{a-x} \text{ og } dt = -\frac{ds}{h}$$

altsaa,

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

og naar man integrerer:

$$t = -\int \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

For at have T maa man tage Integralet fra $x=a$ til $x=o$ og man har altsaa:

$$T = \int \frac{ds}{\sqrt{a-x}} \text{ (fra } x=o, \text{ til } x=a)$$

Da nu T er lig Ψa, saa bliver altsaa Ligningen

$$\Psi a = \int \frac{ds}{\sqrt{a-x}} \text{ (fra } x=o \text{ til } x=a)$$

Istedetfor at oplöse denne Ligning, vil jeg i Almindelighed vise, hvorledes man kan finde s af Ligningen:

$$\Psi a = \int \frac{ds}{(a-x)^n} \text{ (fra } x=o \text{ til } x=a)$$

hvor n er mindre end 1, for at ikke Integralet skal blive uendeligt mellem de givne Grændser; Ψa er en hvilkensomhelst Funktion, der ikke bliver uendelig naar $a=o$.

Man sætte $s = \Sigma \alpha^{(m)} x^m$, hvor $\Sigma \alpha^{(m)} x^m$ har fölgende Værdie

$\Sigma \alpha^{(m)} x^m = \alpha^{(m')} x^{m'} + \alpha^{(m'')} x^{m''} + \alpha^{(m''')} x^{m'''} +$ &c. in inf.

Differentieres, saa faaer man

$$ds = \Sigma m\alpha^{(m)} x^{(m-1)} dx$$

altsaa

$$\frac{ds}{(a-x)^n} = \frac{\Sigma m\alpha^m . x^{m-1}}{(a-x)^n} = \Sigma m\alpha^{(m)} . \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n}$$

Integrerer man, saa faaer man:

$$\int \frac{ds}{(a-x)^n} = \int \Sigma m\alpha^{(m)} \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} \; (x=o, \; x=a)$$

Nu er $\int \Sigma m\alpha^{(m)} \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} = \Sigma \left(\alpha^{(m)} m \int \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} \right)$

altsaa da $\int \frac{ds}{(a-x)^n} = \Psi a$

$$\Psi a = \Sigma \alpha^{(m)} m \int \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} \; (x=o, \; x=a)$$

Værdien af Integralet $\int \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} \; (x=o, x=a)$ findes let saaledes:

Man sætte $x = a . t$, saa er: $x^m = a^m t^m$, $mx^{m-1} dx = ma^m t^{m-1} dt$

$(a-x)^n = (a-at)^n = a^n . (1-t)^n$, altsaa:

$$\frac{mx^{m-1} dx}{(a-x)^n} = \frac{ma^{m-n} t^{m-1} dt}{(1-t)^n}$$

og naar man integrerer:

$$m . \int \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} = ma^{m-n} . \int \frac{t^{m-1} dt}{(1-t)^n} \begin{Bmatrix} x=o & t=o \\ x=a & t=1 \end{Bmatrix}$$

Nu har man $\int \frac{t^{m-1} dt}{(1-t)^n} \; (t=o, t=1) = \frac{\Gamma(1-n) . \Gamma(m)}{\Gamma(m-n+1)}$

hvor $\Gamma(m)$ er en Funktion, der er bestemt ved Ligningerne

$$\Gamma(m+1) = m.\Gamma(m),\ \Gamma(1) = 1\ (*).$$

Indsættes denne Værdie for Integralet $\int \frac{t^{m-1}dt}{(1-t)^n}$ og lægges Mærke til at $m\Gamma(m) = \Gamma(m+1)$ saa faaer man

$$m.\int \frac{x^{m-1}dx}{(a-x)^n} = \frac{\Gamma(1-n).\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}.a^{m-n}$$

Indsættes denne Værdie i Udtrykket for Ψa saa faaer man:

$$\Psi a = \Gamma(1-n).\Sigma\alpha^{(m)}a^{m-n}.\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}$$

Lad Ψa være $= \Sigma\beta^{(k)}.a^k$ saa har man

$$\Sigma\beta^{(k)}.a^k = \Sigma\frac{\Gamma(1-n).\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}.\alpha^{(m)}a^{m-n}$$

Skal denne Ligning finde Sted, saa maa man have

$$m - n = k,\ \text{altsaa}\ m = n+k,\ \text{og}$$

$$\beta^{(k)} = \frac{\Gamma(1-n).\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}.\alpha^{(m)} = \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k+1)}.\alpha^{(m)}$$

altsaa:

$$\alpha^{(m)} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-n).\Gamma(n+k+1)}.\beta^{(k)}$$

Nu er: $\int \frac{t^k.dt}{(1-t)^{1-n}}$ (fra $t=o$ til $t=1$) $= \frac{\Gamma(n).\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)}$

fölgelig:

$$\alpha^{(m)} = \frac{\beta^{(k)}}{\Gamma(n).\Gamma(1-n)}.\int \frac{t^k.dt}{(1-t)^{1-n}}.(t=o,\ t=1)$$

Multipliceres med $x^m = x^{1+k}$, saa faaer man

$$\alpha^{(m)}x^m = \frac{x^1}{\Gamma(n).\Gamma(1-n)}\int \frac{\beta^{(k)}.(xt)^k.dt}{(1-t)^{1-n}}(t=o,\ t=1)$$

---

*) Denne mærkværdige Funktions Egenskaber ere vidtlöftigen udviklede af Legendre i hans Værk Exercices de calcul intégral T. I. og II.

og heraf:

$$\Sigma a^{(m)}.\, x^{m} = \frac{x^{n}}{\Gamma(n).\Gamma(1-n)} \int \frac{\Sigma(\beta^{(k)}(xt)^{k}.)dt}{(1-t)^{1-n}}$$

nu er $\Sigma a^{(m)} x^{m} = s$ og $\Sigma \beta^{(k)} (xt)^{k} = \Psi(xt)$ altsaa:

$$s = \frac{x^{n}}{\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)} \cdot \int \frac{\Psi(xt).dt}{(1-t)^{1-n}} \; (t=o,\; t=1)$$

Lægges endvidere Mærke til at man har $\Gamma(n) \cdot \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ saa bliver Værdien af s

$$s = \frac{\sin n\pi \,.\, x^{n}}{\pi} \cdot \int \frac{\Psi(xt).dt}{(1-t)^{1-n}} \; (t=o,\; t=1)$$

Af det Foregaaende flyder fölgende mærkværdige Theorem:

"Naar man har

$$\Psi a = \int \frac{ds}{(a-x)^{n}} \; (x=o \;\; x=a)$$

"saa har man ogsaa

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \cdot x^{n} \int \frac{\Psi(xt).dt}{(1-t)^{1-n}} \; (t=o,\; t=1)$$

Lad os nu anvende dette paa Ligningen

$$\Psi a = \int \frac{ds}{\sqrt{a-x}} \; (x=o,\; x=a)$$

Man har i dette Tilfælde $n=\frac{1}{2}$, altsaa $1-n=\frac{1}{2}$, og fölgelig:

$$s = \frac{\sqrt{x}}{\pi} \int \frac{\Psi(xt).dt}{\sqrt{1-t}} \; (t=o,\; t=1)$$

Dette er altsaa Ligningen for den sögte Kurve mellem Abscissen x og den tilsvarende Bue s, hvoraf let en Ligning mellem retvinklede Koordinater udledes, da nemlig $ds^{2} = dx^{2} + dy^{2}$.

Lad os nu anvende den foregaaende Oplösning paa nogle specielle Tilfælde:

1) At finde den krumme Linie, som har den Egenskab, at Tiden, som et Legeme bruger til at gjennemlöbe en vis Bue, forholder sig som den n^{te} Potens af den Höide hvorigjennem Legemet er falden:

I dette Tilfælde er $\Psi a = c . a^n$ hvor c er en konstant Störrelse, altsaa: $\Psi(xt) = cx^n . t^n$, fölgelig:

$$s = \frac{\sqrt{x}}{\pi} . \int \frac{cx^n . t^n . dt}{\sqrt{1-t}} = x^{n+\frac{1}{2}} . \frac{c}{\pi} . \int \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} (t=o,\ t=\tfrac{1}{0})$$

altsaa naar $\frac{c}{\pi} \int \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}}$ sættes $= C$

$$s = C . x^{n+\frac{1}{2}}$$

heraf faaes:

$$ds = (n+\tfrac{1}{2})\, C . x^{n-\frac{1}{2}} dx$$

$$ds^2 = ((n+\tfrac{1}{2})\, C)^2 . x^{2n+1} dx^2 = dy^2 + dx^2$$

hvoraf

$$dy = dx . \sqrt{k . x^{2n-1} - 1} \text{ naar } ((n+\tfrac{1}{2})\, C)^2 \text{ sættes } = k$$

og altsaa bliver Ligningen for den sögte Linie

$$y = \int dx . \sqrt{k . x^{2n-1} - 1}$$

Sættes $n = +\frac{1}{2}$ saa faaer man $x^{2n-1} = 1$ og altsaa

$$y = \int dx . \sqrt{k-1} = k^1 + x . \sqrt{k-1}$$

Den sögte Linie er altsaa en ret Linie.

2) At finde en Ligning for Ligetids-Linien (linea isochrona).

Da Tiden skal være uafhængig af det gjennemlöbne Rum, saa har man $\Psi a = c$ og altsaa

$$s = \frac{\sqrt{x}}{\pi} . c \int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} (t=o,\ t=1)$$

fölgelig $s = k.\sqrt{x}$, hvor $k = \frac{c}{\pi} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} (t=o, t=1)$

Dette er som bekjendt Ligningen for Cykloiden.

Vi have seet at naar

$$\psi a = \int \frac{ds}{(a-x)^{n}} \quad (x=o,\ x=a)$$

saa er

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} . x^{n} . \int \frac{\psi(xt).dt}{(1-t)^{1-n}} \quad (t=o,\ t=1)$$

Man kan ogsaa udtrykke s paa en anden Maade, som jeg for dens Besynderligheds Skyld vil anföre, nemlig

$$s = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int^{n} \psi x . dx^{n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} . \frac{d^{-n}\psi x}{dx^{-n}}$$

eller naar

$$\psi a = \int ds . (a-x)^{n} \quad (x=o,\ x=a)$$

saa er

$$s = \frac{1}{\Gamma(1-n)} . \frac{d^{n}.\ \psi x}{dx^{n}}$$

det er:

$$\psi a = \frac{1}{\Gamma(1-n)} . \int \frac{d^{n}\psi x}{dx^{n}} (a-x)^{n} \quad (x=o,\ x=a)$$

Denne Sætning bevises let saaledes:

antages $\Sigma\alpha^{(m)}.\ x^{m} = \psi x$

saa faaer man ved at differentiere:

$$\frac{d^{k}\psi x}{dx^{k}} = \Sigma\alpha^{(m)}.\ m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1).\ x^{m-k}$$

men $m(m-1)(m-2)(m-k+1) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)}$

altsaa

$$\frac{d^{k}\psi x}{dx^{k}} = \Sigma\alpha^{(m)}.\ \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)} . x^{m-k}$$

nu er

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)} = \frac{1}{\Gamma(-k)} \int \frac{t^m \cdot dt}{(1-t)^{1+k}} (t=o,\ t=1)$$

altsaa:

$$\frac{d^k \psi x}{dx^k} = \frac{1}{x^k \cdot \Gamma(-k)} \int \frac{\Sigma \alpha^{(m)} \cdot (xt)^m \cdot dt}{(1-t)^{1+k}} (t=o,\ t=1)$$

men $\Sigma \alpha^{(m)} (xt)^m = \psi(xt)$, altsaa

$$\frac{d^k \psi x}{dx^k} = \frac{1}{x^k \cdot \Gamma(-k)} \cdot \int \frac{\psi(xt) \cdot dt}{(1-t)^{1+k}} (t=o,\ t=1)$$

Sættes $k = -n$ saa faaer man

$$\frac{x^n}{\Gamma(n)} \cdot \int \frac{\psi(xt)\, dt}{(1-t)^{1-n}} (t=o,\ t=1) = \frac{d^{-n} \psi x}{dx^{-n}}$$

Men vi have seet at

$$s = \frac{x^n}{\Gamma(n) \cdot \Gamma(1-n)} \int \frac{\psi(xt) \cdot dt}{(1-t)^{1-n}} (t=o,\ t=1)$$

altsaa

$$s = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \frac{d^{-n} \psi x}{dx^{-n}}, \text{naar } \psi a = \int \frac{ds}{(a-x)^n} (x=o, x=a),$$

q. e. d.

Differentieres Værdien for s nGange, saa faaer man

$$\frac{d^n s}{dx^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \psi x\,,$$

altsaa naar s sættes $= \phi x$

$$\frac{d^n \phi a}{da^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \cdot \int \frac{\phi^1 x\, dx}{(a-x)^n} (x=o,\ x=a)$$

Man maa lægge Mærke til, at i det Foregaaende n altid maa være mindre end 1.

Sættes $n = \frac{1}{2}$ saa har man

$$\psi a = \int \frac{ds}{\sqrt{a-x}} (x=o,\ x=a)$$

og $$s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d^{-\frac{1}{2}} \psi x}{dx^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{\frac{1}{2}} \psi x . dx^{\frac{1}{2}}$$

Dette er altsaa Ligningen for den sögte Kurve naar Tiden er $= \psi a$.

Af denne Ligning faaes:

$$\psi x = \sqrt{\pi} \cdot \frac{d^{\frac{1}{2}}s}{dx^{\frac{1}{2}}}$$

altsaa:

Naar Ligningen for en krum Linie er $s = \varphi x$, saa er Tiden, som et Legeme bruger for at giennemlöbe en Bue, hvis Höide $= a$, lig $\sqrt{\pi} \cdot \frac{d^{\frac{1}{2}}.\varphi a}{da^{\frac{1}{2}}}$; det nederste Punkt af a er fast.

II.

Værdien af Udtrykket $\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})$.

Saa ofte φ betegner en algebraisk, logarithmisk, exponentiel eller Cirkel-Funktion, kan man, som bekjendt, altid udtrykke den reelle Værdie af $\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1})$ under en reel og endelig Form. Derimod har man, naar φ beholder sin Almindelighed, ikke hidindtil kunnet udtrykke den under en reel og endelig Form, i det mindste ikke saavidt mig er bekjendt. Man kan giöre det ved Hjelp af bestemte Integraler paa følgende Maade.

Udvikler man $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ og $\varphi(x-y\sqrt{-1})$ efter det Tailorske Theorem, saa faaer man

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = \varphi x + y\sqrt{-1}.\,\varphi' x$$

$$-\frac{y^2\varphi'' x}{1.2} - \frac{y^3\sqrt{-1}.\varphi''' x}{1.2.3} + \frac{y^4\varphi^{\mathrm{IV}} x}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$\varphi(x-y\sqrt{-1}) = \varphi x - y\sqrt{-1}.\ \varphi' x$$

$$-\frac{y^2\varphi'' x}{1.2.} + \frac{y^3\sqrt{-1}.\varphi''' x}{1.2.3.} + \frac{y^4.\varphi^{IV} x}{1.2.3.4.} - \&c.$$

altsaa:

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1}) =$$

$$2.\left(\varphi x - \frac{y^2.\varphi'' x}{1.2.} + \frac{y^4.\varphi^{IV} x}{1.2.3.4.} - \frac{y^6.\varphi^{VI} x}{1.2.3.4.5.6.} + ..\right)$$

For at finde Summen af denne Række, lad os betragte Rækken:

$$\varphi(x+t) = \varphi x + t.\varphi' x + \frac{t^2.\varphi'' x}{1.2.} + \frac{t^3.\varphi''' x}{1.2.3} + \ldots$$

Multipliceres med $e^{-v^2t^2}.dt$, og integreres fra $t = -\alpha$ til $t = +\alpha$ saa faaer man

$$\int \varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2}.\ dt = \varphi x. \int e^{-v^2t^2} dt +$$

$$\varphi' x \int e^{-v^2t^2}\, t dt + \frac{\varphi'' x}{1.2} \int e^{-v^2t^2}\, t^2 dt + \&c.$$

Nu er $\int e^{-v^2t^2}.\, t^{2n+1}.\, dt\ (t = -\alpha,\ t = +\alpha) = o,$

altsaa

$$\int \varphi(x+t) e^{-v^2t^2}\, dt = \varphi x. \int e^{-v^2t^2}\, dt +$$

$$\frac{\varphi'' x}{1.2} \int e^{-v^2t^2}\, t^2 dt + \frac{\varphi^{IV} x}{1.2.3.4}. \int e^{-v^2t^2}\, t^4 dt + \&c.$$

Lad os betragte Integralet $\int e^{-v^2 t^2} t^2 dt \; (t = -\infty, t = +\infty)$

Man sætte $t = \frac{\alpha}{v}$, saa er $e^{-v^2 t^2} = e^{-\alpha^2}$, $t^{2n} = \frac{\alpha^{2n}}{v^{2n}}$,

$dt = \frac{dt}{v}$ altsaa:

$$\int e^{-v^2 t^2} t^{2n} dt \; (t = -\infty, t = +\infty)$$

$$= \frac{1}{v^{2n+1}} \cdot \int e^{-\alpha^2} . \alpha^{2n} d\alpha \; (\alpha = -\infty, \alpha = +\infty)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{v^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}.(2k-1)(2k-3)(2k-5)\ldots.3.1}{2^n . v^{2n+1}} \text{(*)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{v^{2n+1}} \cdot A_n$$

Indsættes denne Værdie saa faaer man:

$$\int \varphi(x+t) . e^{-v^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v}\left(\varphi x + \frac{A_1}{2} . \frac{\varphi'' x}{v^2} + \frac{A_2}{2.3.4.} \cdot \frac{\varphi^{IV} x}{v^4} + \ldots . . \right)$$

Multipliceres med $dv . v . e^{-v^2 y^2}$ og integreres fra $v = -\infty$ til $v = +\infty$ saa faaer man:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int v \, dv \, e^{-v^2 y^2} \int \varphi(x+t) \, e^{-v^2 t^2} dt$$

$$= \varphi x . \int e^{-v^2 y^2} dv + \frac{A_1 \varphi'' x}{2} \int e^{-v^2 y^2} \frac{dv}{v^2} + \ldots . .$$

*) Man see Legendre Exercices de calcul intégral.

Sættes $vy = \beta$ saa faaer man

$$\int e^{-v^2y^2} \frac{dv}{v^{2n}} = y^{2n-1} \cdot \int e^{-\beta^2} \frac{d\beta}{\beta^{2n}} (\beta = -\infty \, \beta = +\infty)$$

Nu er $\int e^{-\beta^2} \frac{d\beta}{\beta^{2n}} (\beta = -\infty, \beta = +\infty) = \Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right) =$

$$\frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot \sqrt{\pi}}{(2n-1)(2n-3) \ldots 3.1} = \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{\pi}}{A_n}$$

altsaa

$$\int e^{-v^2y^2} \frac{dv}{v^{2n}} = \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{\pi} \cdot y^{2n-1}}{A_n}$$

og

$$An \int e^{-v^2y^2} \cdot \frac{dv}{v^{2n}} = \sqrt{\pi} (-1)^n \cdot y^{2n-1}$$

Indsættes denne Værdie, saa faaer man efter at have divideret med $\frac{\sqrt{\pi}}{2y}$.

$$\frac{2y}{\pi} \cdot \int v dv \, e^{-v^2y^2} \int \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt$$

$$= 2\left(\varphi x - \frac{\varphi'' x}{2} y^2 + \frac{\varphi^{\text{IV}}}{2.3.4.} \cdot y^4 - \ldots\ldots\right)$$

Den anden Side af denne Ligning er

$$= \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$$

altsaa:

$$\varphi(x + y\sqrt{-1} + \varphi(x - y\sqrt{-1}) =$$

$$\frac{2y}{\pi} \cdot \int v dv \, e^{-v^2y^2} \int \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt \begin{Bmatrix} t = -\infty \, v = -\infty \\ t = +\infty \, v = +\infty \end{Bmatrix}$$

Antages $x = o$, saa faaer man

$$\varphi\,(y\sqrt{-1}) + \varphi(-y\sqrt{-1}) =$$
$$\frac{2y}{\pi}\int v dv\, e^{-v^2 y^2}\int \varphi t.\, e^{-v^2 t^2} dt \begin{Bmatrix} t=-\infty & v=-\infty \\ t=+\infty & v=+\infty \end{Bmatrix}$$

Lad f. Ex. φt være $= e^t$ saa har man

$$\varphi(y\sqrt{-1})+\varphi(-y\sqrt{-1}) = e^{y\sqrt{-1}} + e^{y\sqrt{-1}} = 2.\cos y$$

altsaa

$$\cos y = \frac{2y}{\pi}\int v dv\, e^{-v^2 y^2}\int e^{t-v^2 t^2} dt \begin{Bmatrix} t=+\infty & v=+\infty \\ t=-\infty & v=-\infty \end{Bmatrix}$$

$$\text{nu er} \int e^{t-v^2 t^2} dt\,(t=-\infty\ t=+\infty) = \frac{e^{\frac{1}{4v^2}} \cdot \sqrt{\pi}}{v}$$

altsaa

$$\cos y = \frac{2y}{\sqrt{\pi}}\int dv.\, e^{-v^2 y^2 + \frac{1}{4v^2}}\ (v=-\infty,\ v=+\infty)$$

Sættes $v = \frac{t}{y}$ saa faaer man

$$\cos y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int dt.\, e^{-t^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{t^2}}\ (t=-\infty,\ t=+\infty)$$

Ved at give φt andre Værdier kan man udlede Værdien af andre bestemte Integraler, men da det kun var min Hensigt at bestemme Værdien af $\varphi\,(x + y\sqrt{-1}) + \varphi\,(x - y\sqrt{-1})$ vil jeg ei opholde mig derved.

Til Slutning maa jeg bemærke, at paa samme Maade som jeg af Ligningen

$$\psi(a) = \int \frac{ds}{a(a-x)^n} \; (x=o, x=a)$$

har fundet s, saaledes har jeg ogsaa af Ligningen

$$\psi a = \int \varphi(xa) \,.\, fx \,.\, dx$$

fundet Funktionen φ, hvor ψ og f ere givne Funktioner Integralet er taget mellem hvilkesomhelst Grændser; men Oplösningens Vidtlöftighed forbyder mig at anföre den.