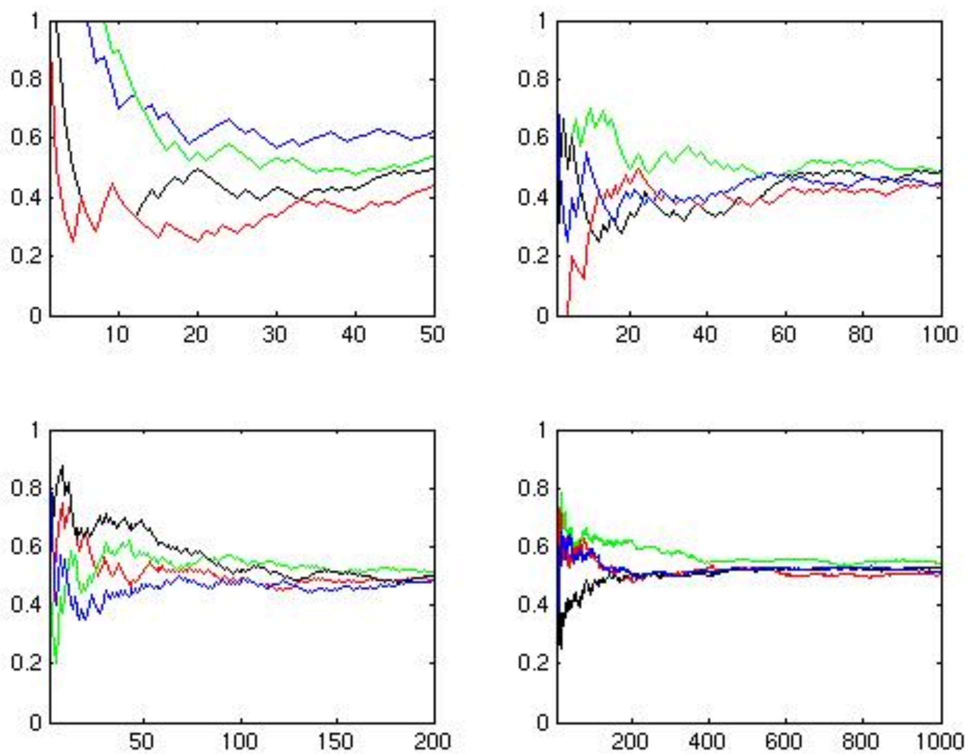
S.R.S Varadhan

av Professor Tom Louis Lindstrøm

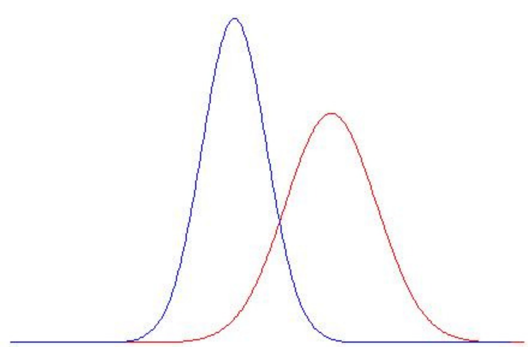
Srinivasa S. R. Varadhan er født i Madras (Chennai) i India i 1940. Han tok bachelor-graden ved Presidency College i 1959 og doktorgraden ved Indian Statistical Institute i 1963. Fra 1963 har han vært tilknyttet Courant Institute of Mathematical Sciences ved New York University. Courant-instituttet er et av verdens ledende sentre for anvendt matematikk, og det er også arbeidssted for Abelprisvinneren fra 2005, Peter Lax.

Selv om hans forskning ofte er inspirert av problemer i nærliggende forskningsområder som matematisk fysikk og partielle differensialligninger, er Varadhan først og fremst sannsynlighetsteoretiker. Sannsynlighetsteoriens historie begynte med forsøk på å forstå enkle sjansespill, ofte med veddemål involvert. I slike spill finnes det et endelig antall utfall, og oppgaven er å finne hvor sannsynlig hvert av dem er. Dette kan høres enkelt ut, men for å løse problemer av denne typen trenger man ofte en god idé. Sannsynlighets-teorien beveget seg imidlertid raskt videre til viktigere og vanskeligere spørsmål. Disse spørsmålene dreier seg ofte om hva som skjer dersom man gjentar det samme eksperimentet om igjen og om igjen, og de matematiske lovene som styrer disse gjentatte eksperimentene, kalles gjerne *grenselover* siden de beskriver hva som skjer i "grensen" når man gjentar eksperimentet stadig flere ganger. To av disse grensesetningen har vi alle en viss erfaring med.



For å beskrive den første av disse lovene tenker vi oss at vi kaster en mynt mange ganger. Dersom mynten er ekte, forventer vi at andelen av kron stabiliserer seg rundt ½ når vi kaster flere og flere ganger. Dette er et eksempel på *de store talls lov* som i dette tilfellet sier at når vi kaster stadig flere ganger, vil (med sannsynlighet 1) andelen av kron gå mot nøyaktig ½. Figurene ovenfor illustrerer det som skjer. I hvert tilfelle har vi utført fire serier av myntkast og beregnet andelen av kron. I figuren øverst til venstre ser vi resultatene når seriene består av femti myntkast hver. De andre figurene viser resultatene når seriene består av henholdsvis 100, 200 og 1000 myntkast. Vi ser at kurvene nærmer seg ½ ganske langsomt — selv når vi kaster 1000 ganger, kan vi klart skjelne de fire seriene fra hverandre.

For å beskrive den andre grenseloven som vi alle har en viss erfaring med, tenker vi oss at vi måler høyden til alle norske, mannlige rekrutter. Hvis vi lager et diagram som viser hvor mange soldater det er av hver høyde (dvs. hvor mange som 175 cm høye, hvor mange som 176 cm osv.), vil dette diagrammet fort få (kirke-)klokkeform, og etterhvert som vi legger til høyden til flere og flere soldater, vil formen bli stadig jevnere. Kurven er symmetrisk rundt midten, og midtpunktet viser gjennomsnittshøyden (ca. 180 cm for norske, mannlige rekrutter). Gjør vi det samme eksperimentet med kvinnlige rekrutter, får vi den samme typen klokkeformet kurve, men med et annet midtpunkt (siden kvinner i gjennomsnitt ikke er så høye som menn) og en litt annen bredde. Det vi ser her er konsekvenser av *den sentrale grensesetningen* som sier at statistiske egenskaper som avhenger av mange små, uavhengige faktorer, har en klokkeformet fordeling. Disse klokkeformede fordelingene kalles *normalfordelinger*, og forskjellige normalfordelinger beskrives av to tall (forventningen og variansen), der det ene forteller oss hvor midtpunktet ligger, og det andre forteller oss hvor bred og flat kurven er. Figuren nedenfor viser to normalfordelinger med forskjellig midtpunkt og bredde, dvs. med forskjellig forventning og varians.



Hvorfor er disse grenselovene viktige? De er viktige fordi man i de fleste praktiske situasjoner er interessert i store samlinger av statistiske data. Hvis du driver et bilforsikringsselskap, er du ikke interessert i hver enkelt bil, men du er interessert i hvor mange ulykker (og hva slags ulykker) *alle* bilene du forsikrer blir involvert i. Bygger du oljeplattformer i Nordsjøen og bekymrer deg for bølgenes arbeid mot plattformen, er det ikke hver enkelt bølge du er interessert i, men den totale påvirkningen fra alle bølgene. Hvis du bygger ut et telefonnett og er bekymret for kapasiteten, er du ikke interessert i hver enkelt kunde, men du er bekymret for at altfor mange av dem skal bestemme seg for å ringe samtidig når pågangen er som verst.

Studerer du de matematiske problemstillingene knyttet til spørsmålene ovenfor, vil du finne at mange av dem kan løses ved hjelp av de store talls lov og den sentrale grensesetningen. Men ikke alle! Et interessant spørsmål de ikke kan hjelpe oss å besvare, er spørsmålet om "store avvik". La oss gå tilbake til myntkastene våre for å forklare dette problemet. Hvis vi kaster en mynt mange ganger, venter vi at andelen av kron skal ligge rundt ½. Men dette *behøver* ikke skje — selv om du kaster en mynt 1000 ganger, er det en liten (ekstremt liten!) sannsynlighet for at alle kastene blir kron. Det er en større — men fremdeles ørliten — sannsynlighet for at andelen kron er (la oss si) ¾ istedenfor ½. Teorien for *store avvik* handler om å beregne sannsynligheten for slike sjeldne hendelser.

Store avvik ble først studert av den store, svenske statistikeren og forsikringsmatematikeren Harald Cramér (1893-1985) på slutten av 1930-tallet. Det er lett å forstå hvorfor problemet tiltrakk seg oppmerksomheten til en forsikringsmatematiker. Premien du betaler for bilforsikringen din, er basert på statistikk fra tidligere år — forsikringsselskapet må være sikker på at det samler inn nok penger til å dekke skadene til uheldige bilister. Men hva skjer om dette året er et spesielt dårlig år? Kanskje kolliderer langt flere biler en vanlig av en eller annen ukjent grunn — eller kanskje bare på grunn av uflaks. Hvis selskapet må betale ut flere penger enn det har, er det opplagt i trøbbel!

Det finnes ingen metode for å unngå dette problemet fullstendig. Hvis selskapet satte premien så høyt at den dekket det usannsynlige, men likevel mulige tilfellet at *alle* bilene kolliderte, ville premien bli så høy at ingen kjøpte forsikringen! Et ekstremt dårlig år er et eksempel på *store avvik*, og det forsikringsselskapet må gjøre, er å beregne sannsynligheten for slike store avvik av forskjellige størrelser, og så finne frem til et rimelig risikonivå. Det er tilsvarende problemer i de andre eksemplene ovenfor — bygger du en oljerigg i Nordsjøen, bør du bekymre deg for sannsynligheten for ekstremt store og sjeldne bølger ("hundreårsbølgen"), og planlegger du å sette opp et telefonnett, vil du gjerne vite litt om sannsynligheten for at det av og til vil bryte sammen på grunn av overbelastning — det kan være lurt å investere penger i et litt større nett for å slippe stadig å motta klager fra misfornøyde kunder.

En av Varadhans store bragder er at han utviklet teknikken for store avvik slik at den ble et uhyre kraftig og fleksibelt verktøy med anvendelsesmuligheter på mange felt innenfor matematikken og tilstøtende fagområder (deler av dette arbeidet ble gjort i samarbeid med en kollega ved Courant-instituttet, Monroe Donsker). Varadhans *prinsipp for store avvik* oppsummerer på en kortfattet og presis måte det som trengs for å benytte metoden, og det dekker et forbløffende antall tilsynelatende forskjellige situasjoner. Teorien er en kraftprestasjon innenfor mange deler av matematikken; den kombinerer sannsynlighetsteori med konveks analyse, matematisk programmering, funskjonalanalyse og partielle differensialligninger. Det viser seg at teorien for store avvik er mye mer subtil enn teorien for de klassiske grenselovene slik som de store talls lov og den sentrale grensesetningen. I disse grenselovene er det viktigste at den samme typen hendelse telles igjen og igjen — hva slags hendelse dette faktisk er, viser seg å være av mindre betydning (eller, for å være litt mer korrekt, det som er viktig med enkelthendelsene lar seg kort oppsummere i to tall, forventningen og variansen). I teorien for store avvik er enkelthendelsenes natur av den aller største betydning – forskjellige typer enkelthendelser gir opphav til helt forskjellige sannsynligheter for store avvik. Et forsikringsselskap som ønsker å beregne sannsynligheten for store avvik, må derfor vite langt mer om bilskader enn hvor ofte de skjer og hvor store de er i gjennomsnitt.

I tillegg til eksemplene vi allerede har sett på, vil jeg nevne de mange anvendelsene som teorien for store avvik har i fysikk. Mange fysiske teorien er av statistisk natur. Hvis du for eksempel vil beskrive luften i dette rommet eller vannet i en strømmende elv, kan du umulig beskrive bevegelsen til hvert enkelt molekyl eller partikkel. Du må isteden prøve å beskrive den *statistiske oppførselen* til alle partiklene ved hjelp av makroskopiske størrelser som trykk og fluks. De lovene og ligningene du da får, er *ikke* statistiske, de beskriver bare gjennomsnittsoppførselen (eller den forventede oppførselen) til gassen eller væsken. Du kan tenke på dette som en mye mer komplisert versjon av myntkastene våre — der kunne vi oppsummere gjennomsnittsoppførselen i det enkle tallet ½, mens vi nå oppsummerer gjennomsnittsoppførselen gjennom de grunnleggende lovene for termodynamikk og hydromekanikk Men akkurat som i myntkastene finnes det fluktuasjoner også i dette tilfellet — kanskje er det en liten sannsynlighet for at all luften i dette rommet plutselig vil samles i denne enden slik at dere gisper etter luft i den andre enden!

Faktisk er disse problemene enda mer kompliserte enn det jeg hittil har beskrevet. Partiklenes oppførsel er nemlig slett ikke tilfeldig — de beveger seg i henhold til grunnleggende fysiske lover, og bevegelsesmønsteret bare *virker* tilfeldig fordi partiklene hele tiden kolliderer med hverandre og påvirker hverandre. Vil man utlede ligningene i termodynamikk og hydrodynamikk fra grunnleggende fysiske lover, må man derfor gjennom en to-skritts prosess — først må man utlede den statistiske oppførselen til partiklene fra de fysiske lovene, og så må man vise at denne statistiske oppførselen fører til ligningene i termodynamikken og hydromekanikken. Sammen med sine medarbeider har Varadhan gjort imponerende arbeid med dette problemkomplekset, ofte med teorien for store avvik som et viktig verktøy.

La oss gå tilbake til myntkastene for å ta en kikk på en annen del av Varadhans verk. Vi kan tenke på myntkasting som et enkelt sjansespill — hver gang vi kaster kron, vinner jeg, og du må betale meg en krone, men hver gang vi kaster mynt, vinner du, og jeg må betale deg en krone. Dette spillet er rettferdig i den forstand at ingen av oss kan forvente en gevinst i det lange løp. La oss endre spillet en smule slik at vi kaster en terning istedenfor en mynt. Hver gang vi kaster en sekser, vinner jeg fem kroner av deg, men hver gang en annen side kommer opp, vinner du én krone av meg. Dette spillet er rettferdig i samme forstand som ovenfor. Riktignok vinner jeg fem ganger så mye som deg hver gang jeg vinner, men du kan vente å vinne fem ganger så ofte som meg. I det lange løp kan ingen av oss regne med gevinst. Spill som er rettferdige på denne måten, kalles *martingaler*, og dette begrepet kan utvides til langt mer generelle sammenhenger. I løpet av de siste femti årene har det vist seg at martingaler er et svært nyttig redskap når man vil studere tilfeldige fenomener. På 1970-tallet skrev Varadhan og D. W. Stroock en imponerende serie artikler om såkalte "martingalproblemer", et arbeid som i 1979 kulminerte i boken “Multidimensional Diffusion Processes”. Teorien deres forenklet, utvidet og forente de tidligere resultatene på området. Den grunnleggende ideen er at man istedenfor å se etter kompliserte løsninger på problemer i matematisk analyse, “bare” behøver å se etter en sannsynlighetsfordeling som gjør visse prosesser til martingaler.

- — -

Jeg har nevnt noen av Varadhans viktigste bidrag til matematisk forskning, men det er mange flere. Varadhan er en produktiv matematiker med dype ideer og imponerende ferdigheter. Han er høyt verdsatt blant sannsynlighetsteoretikere, ikke bare for sine resultater, men også for sin stil — en forelesning av Varadhan gir ikke bare tilgang til de nyeste og beste forskningsresultatene, den gir oss et innblikk i hans måte å tenke på. Foredragene hans vektlegger alltid ideene, utfordringene, vanskelighetene — og den delikate balansen mellom det ønskelige og det mulige som man alltld må finne for å produsere fremragende matematikk. S. R. S. Varadhan er utvilsomt en verdig vinner av Abelprisen!