PETER D. LAX
ET EKSEMPEL FRA HANS BIDRAG TIL MATEMATIKKEN

HELGE HOLDEN

1. INNLEDNING

Peter D. Lax har gitt fundamentale bidrag til en rekke sentrale områder av matematikken. Hans bidrag inngår i en lang tradisjon der vekselvirkningen mellom fysikk og matematikk er sentral. Fysikken gir opphav til utfordrende problemer samtidig som den gir intuisjon om egenskaper ved løsningen. Matematikk kan avdekke dype, indre sammenhenger og egenskaper, og rigorøse matematiske bevis gir et solid grunnlag for vår innsikt.

John von Neumann, som hadde stor innflytelse på Lax, fastslo i 1945 at[1] “virkelig effektive høyhastighets datamaskiner kan, innenfor ikke-linære differensialigninger såvel som innen mange andre områder av matematikken der matematisk analyse har liten eller ingen effekt, gi oss den heuristiske innsikten vi trenger for å få ytterligere innsikt.” Lax uttalte i 1986 at[2] “[a]nvendt og ren matematikk er nærmere knyttet sammen nå enn noen gang tidligere de siste 70 årene”. Det er i denne ånd Lax har arbeidet.

Peter D. Lax

I denne korte og ikke-faglige presentasjonen vil vi fokusere på et område der Peter Lax har gitt fundamentale bidrag som fortsatt dominerer feltet. Vi vil her understreke Lax’ bidrag der de anvendte aspektene er mest sentrale og har store konsekvenser for vårt moderne samfunn, men vår presentasjon vil ikke nødvendigvis understreke deres matematiske eleganse. Vi vil dessvere ikke komme inn på hans fundamentale bidrag til klassisk matematisk analyse og spredningsteori, særlig den pene *Lax–Phillips’ spredningsteorien*, eller hans bidrag til solitonteorien der han introduserte de epokegjørende *Lax-parene* som har hatt omfattende konsekvenser innen matematikk, fysikk og teknologi.

Emnet vi vil diskutere, er teorien for sjokkbølger. Sjokkbølger opptrer i mange fenomener i dagliglivet. Lettest å forklare er sjokkbølgene som

Presentert i Det Norske Videnskaps-Akademi den 17. mars 2005.

[1] *Collected works of John v. Neumann*, vol. V, 1963, p. 1–32.

[2] Mathematics and its applications, *The Mathematical Intelligenzer* **8** (1986) 14–17.

oppstår når et fly bryter lydmuren eller ved eksplosjoner. Men sjokk fremkommer også i fenomener ved langt lavere hastigheter. Av spesiell interesse er flyt av hydrokarboner i porøse medier, eller, for å være mer konkret, flyt av olje i et oljereservoar. Det er velkjent at olje og vann ikke blander seg, og overgangen, interfasen, mellom områder med olje og områder med vann er matematisk sett et sjokk. Dynamikken til sjokkene er av avgjørende betydning for utvinningen av hydrokarboner fra oljereservoarene. Men selv i dagligdagse fenomener som rushtrafikk kan man observere sjokkbølger når det er en fortetting med biler. Sjokkene kommer ikke av at bilene kolliderer, men de oppstår når tettheten til bilene gjennomgår en brå endring.

En mer omfattende diskusjon av flere aspekter ved Peter Lax' bidrag til matematikken er å finne i [1]. Et intervju med ham kan leses i [2], og en oversikt over alle hans bidrag kan studeres i hans utvalgte arbeider som nylig er gitt ut [3].

Før vi drøfter disse emnene litt mer inngående, må vi forklare hva en differensialligning er.

2. Hva er en differensialligning?

For å kunne diskutere differensialligninger må vi først introdusere den deriverte. Anta at du kjører i bilen din. På kilometertelleren kan du måle avstanden fra startpunktet, og når du kjenner det, kan du bestemme posisjonen din. Den avstanden du tilbakelegger per tidsenhet kalles hastigheten, og det er selvsagt den du leser av på speedometeret. Matematisk er hastigheten ikke noe annet enn den deriverte av posisjonen. For å gjøre det mer presist lar vi x betegne bilens posisjon målt langs veien fra et eller annet startpunkt. Posisjonen avhenger av tiden, t, så vi skriver $x = x(t)$. Hastigheten, som vi betegner v, og som også avhenger av tiden, $v = v(t)$, er endring i posisjon i et kort tidsintervall, og matematisk kaller vi det den deriverte[3] av x, og vi skriver $x'(t)$. Dermed er $v(t) = x'(t)$.

Hvis en passasjer i bilen hele tiden skriver ned hastigheten, burde det være mulig å beregne bilens posisjon til enhver tid hvis vi kjenner tid og sted der turen startet. Vi kan gjøre det mer presist på følgende måte: Dersom vi kjenner startpunktet x_0 (og synkroniserer klokkene våre slik at vi starter ved tiden $t = 0$), dvs. $x(0) = x_0$, og vi kjenner $v(t)$ for alle tider t, burde vi være i stand til å beregne posisjonen x som en funksjon av tiden, dvs bestemme $x = x(t)$. For å løse dette problemet, må vi løse differensialligningen $x'(t) = v(t)$.

Differensialligninger er simpelthen ligninger som involverer deriverte. Du synes kanskje at vi gjør mye ut av et lite problem. Men det viser seg

[3] Vi kan gjøre det mer presist på følgende måte: Anta at du kjører fra posisjon $x(t)$ ved tiden t til posisjon $x(t+s)$ i løpet av et tidsintervall s. Da er hastigheten ved tid t tilnærmet $(x(t+s) - x(t))/s$ ("hastighet er avstand delt på tid"), og tilnærmingen blir bedre jo kortere intervall s du bruker. Matematisk er hastigheten lik grensen for $(x(t+s) - x(t))/s$ når s går mot null.

at alle naturens fundamentale lover er gitt ved differensialligninger, slik følgende liste viser:

- gravitasjon (Newtons lover),
- kvantemekanikk (Schrödinger-ligningen),
- elektromagnetisme (Maxwells ligninger),
- relativitetsteori (Einsteins ligninger),
- bevegelse av gasser og væsker (Navier–Stokes' ligninger).

Planetenes bevegelser, datamaskiner, elektrisk lys, GPS (Global Positioning System) og været kan alle beskrives ved hjelp av differensialligninger.

La oss nå gå videre til et mer komplisert eksempel enn posisjon og hastighet for biler. Betrakt temperaturen i det rommet der du sitter. I ethvert punkt (x, y, z) i rommet og tid t lar vi $T = T(x, y, z, t)$ betegne temperaturen. Ved å anta at rommet er isolert fra omgivelsene, og at det ikke er noen varmekilder, kan man vise at temperaturfordelingen er gitt ved den såkalte varmeledningsligningen som kan skrives

$$T_t = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}.$$

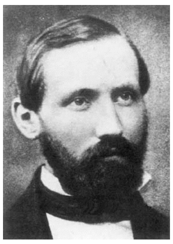
Her betegner T_t den deriverte av temperaturen med hensyn på tiden t mens T_{xx} betegner den deriverte av den deriverte, begge ganger med hensyn på romvariablen x, og tilsvarende for de andre leddene. Selv enkle problemer gir opphav til kompliserte differensialligninger! Anta at vi kjenner den initielle temperaturfordelingen, dvs. vi kjenner $T = T(x, y, z, t)$ for $t = 0$. Da sier vår intuisjon oss at temperaturen skulle være bestemt for alle senere tidspunkter. Dette kalles et initialverdiproblem. Den matematiske utfordringen er å vise at denne påstanden er riktig, og å utlede en metode for å beregne den faktiske temperaturen. Dette er den generelle problemstillingen (for mer avanserte ligninger enn varmeledningsligningen) som er kjernen i Lax' bidrag til teorien for differensialligninger.

Dessverre er det slik at differensialligninger normalt ikke har løsninger som er gitt ved formler, og derfor trenger vi å utvikle metoder for å beregne en tilnærmet eller numerisk løsning. Vi trenger hurtige og kraftige datamaskiner for å bestemme tilnærmede løsninger. Vi understreker at vi bare får en tilnærmet løsning, og at vi trenger å vite om, og i hvor stor grad, vi kan stole på denne. I en situasjon der vi ikke kjenner det eksakte svaret, eller der vi ikke kan vite om vi har rett før det er for sent (f.eks. værmeldingen for i morgen), er det absolutt nødvendig å vite i hvilken grad vi kan stole på våre simuleringer. Peter Lax har gitt fundamentale bidrag til vår forståelse av disse temaene.

Det fins ingen enhetlig teori som innbefatter alle eller de fleste differensialligningene. Ulike klasser av differensialligninger krever ganske forskjellige metoder. Men selv på dette generelle nivået har Lax gitt to meget nyttige resultater som blir beskrevet i alle lærebøker på dette området. *Lax–Milgram teoremet* sier at visse differensialligninger har entydig løsning. *Lax' ekvivalensprinsipp* sier at enhver konsistent numerisk metode for linære problemer er stabil hvis og bare hvis den er konvergent.

Det er passende her å kommentere samspillet mellom matematikk og datamaskiner. Peter Lax har alltid vært en sterk talsmann for at datamaskiner er viktighete for matematikk og vice versa, og han har sagt at[4] "[Hurtige datamaskiners] innflytelse på matematikk, både ren og anvendt, er sammenlignes med den rollen til teleskoper har i astronomi og mikroskoper i biologi". Den logiske konstruksjonen av datamaskiner og deres operativsystem er matematisk i sin natur. Men datamaskiner virker også som laboratorier for matematikere. Her kan du teste idéene dine: Nye matematiske relasjoner kan oppdages, og dine hypoteser og antagelser kan bli motbevist eller gjort mer sannsynlige ved bruk av datamaskiner. Lax har selv gitt eksemplet med den store amerikanske matematikeren G. D. Birkhoff som brukte et helt liv på å prøve å bevise ergodehypotesen. Hvis Birkhoff hadde hatt tilgang på en datamaskin og hadde testet hypotesen på denne, ville han innsett at hypotesen ikke kunne vært riktig generelt sett. På et mer teknisk nivå krever dessuten problemene innen moderne teknologi, som simulering av kompliserte systemer som fly, oljeplattformer eller værmeldinger, ikke bare kraftige datamaskiner, men også at det utvikles nye og bedre matematiske algoritmer for at de kan løses. Faktisk er det slik at utviklingen av hurtige datamaskiner (maskinvare) og utviklingen av nye numeriske teknikker (programvare) i store trekk bidrar like mye til den totale ytelsen vi observerer i simuleringer. Peter Lax har selv gitt gjennomgripende bidrag til utviklingen av nye matematiske metoder som har satt oss i stand til å forstå og simulere viktige fenomener.

3. SJOKKBØLGER



B. Riemann

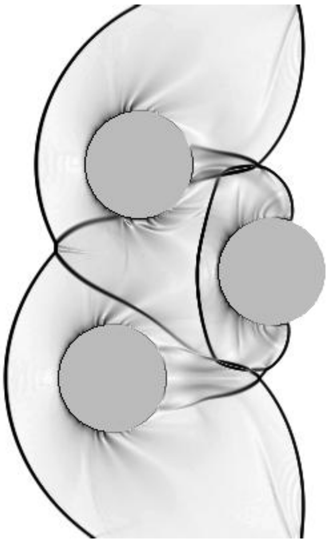
I 1859 betraktet den fremragende tyske matematikeren Berhard Riemann (1826–66) følgende problem: Dersom du har to gasser med ulikt trykk skilt av en membran i en sylinder, hva skjer om du fjerner membranen? Dette problemet er senere blitt kalt Riemann-problemet, og det viser seg å være svært komplisert. Gassers dynamikk blir beskrevet av Euler-ligningene, som kan skrives[5]

$$
\begin{aligned}
\rho_t + (\rho v)_x &= 0,\\
(\rho v)_t + (\rho v^2 + P)_x &= 0,\\
E_t + (v(E+P))_x &= 0,\\
P &= P(\rho),
\end{aligned}
$$

der p, v, P og E betegner henholdsvis gassens tetthet, hastighet, trykk og energi. Selv idag er de generelle Euler-ligningene fortsatt et uløst problem.

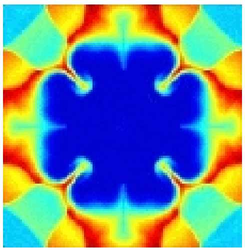
[4]The flowering of applied mathematics in America, *SIAM Review* **31** (1989) 533–541.

[5]Riemann betraktet det noe enklere problemet der man ser bort fra den tredje ligningen. Senket skrift betyr deriverte med hensyn på angitt variabel.



Gasstrøm forbi tre sylindre.

Euler-ligningene er et spesialtilfelle av en klasse av differensialligninger som kalles hyperbolske konserveringslover. Løsningen av disse ligningene er svært komplisert, som figurene viser. Ligningene er svært fundamentale innen flere områder av vitenskapen, idet de uttrykker at en størrelse er bevart eller konservert. Dette gir opphav til mange anvendelser siden masse, moment og energi i følge fysikkens lover er bevart i isolerte systemer. I tillegg til gassers bevegelse inkluderer anvendelsene flyt av olje i oljereservoarer. Et mindre opplagt eksempel er trafikkflyt i rushtrafikk på en vei uten av- og tilkjørsel; her er den bevarte størrelsen antall biler.



Trykkfordelingen til en gass som eksploderer i en boks.

Hovedproblemet med hyperbolske konserveringslover, uavhengig av om de beskriver trafikkflyt eller flyt av olje i et petroleumsreservoar, er at løsningen vil utvikle singulariteter, eller diskontinuiteter, kalt sjokk. Sjokk svarer til svært raske overganger i tetthet eller trykk. Numeriske metoder har problemer med å beregne slike sjokk, og de matematiske egenskapene er svært kompliserte. De matematiske modellene tillater mer enn én løsning, og seleksjonsprinsippet, som her kalles en entropibetingelse, for å velge ut den entydige fysiske løsningen, er vanskelig. På dette punktet gjorde Riemann en feil og valgte en ufysikalsk løsning. Sjokkets hastigheten ble bestemt av den skotske ingeniøren Rankine og den franske matematikeren Hugoniot, men det var Peter Lax som i 1957 foreslo et helt generelt og enkelt kriterium som kalles *Lax' entropibetingelse* for å velge den fysisk korrekte løsningen. De tillatte sjokkene kalles *Lax-sjokk*, og løsningen av Riemann-problemet kalles *Lax' teorem*, og det er fortsatt en hjørnestein i teorien for hyperbolske konserveringslover. Hans løsning har stimulert omfattende videre forskning på ulike entropibetingelser. Spesielt er Lax' teorem byggesteinen i løsningen av det generelle initialverdiproblemet som Glimm viste.

Når man har bestemt et utvelgelsesprinsipp, må man fortsatt beregne løsningen. Her har Peter Lax introdusert to av standardteknikkene, eller "skjemaene", for å løse hyperbolske konserveringslover, nemlig det såkalte *Lax–Friedrichs skjemaet* og *Lax–Wendroff skjemaet*. Disse skjemaene er standardskjemaer for sammenligning med andre numeriske metoder. De har også vært utgangspunkt for teoretisk analyse. For eksempel ble Lax–Friedrichs skjemaet brukt av den russiske matematikeren Oleĭnik i hennes konstruktive bevis for at det eksisterte løsninger av den ikkeviskøse Burgers-ligningen og at løsningene var entydige. Et annet svært nyttig resultat er *Lax–Wendroffs teorem* som sier følgende: Om et numerisk skjema for en ikke-lineær hyperbolsk konserveringslov konvergerer mot en grense, da vil grensen være en løsning av ligningen.

Peter Lax' resultater innen teorien for hyperbolske konserveringslover er grunnleggende. De har løst gamle problemer og stimulert til omfattende videre forskning i feltet. Hans resultater er forsatt helt sentrale i denne delen av matematikken.

Etterord. Lax anser seg selv som både ren og anvendt matematiker. Hans råd til unge matematikere er følgende:[6] "Jeg anbefaler alle yngre matematikere å prøve sine evner i anvendt matematikk. Den er en gullgruve av avanserte problemer hvis løsning krever begrepsmessige så vel som teknologiske gjennombrudd. Den viser en enorm variasjon som gir noe for enhver smak, og gir matematikere mulighet til å delta i en større vitenskapelig og teknologisk aktivitet. God jakt!"

Takk til: Portrettet av Riemann er fra The MacTutor History of Mathematics Archive. Simuleringene er laget av K.-A. Lie (SINTEF).

REFERANSER

[1] The Wolf Prize to P. D. Lax. In: *The Wolf Prize in Mathematics. Volume 2.* (Eds. S. S. Chern, F. Hirzebruch) World Scientific, Singapore, 2001, p. 219–262.

[2] P. D. Lax. In: *More Mathematical People.* (Eds. D. J. Albers, G. L. Alexanderson, and C. Reid) Hartcourt Brace Jovanovich Publishers, Boston, 1990, p. 139–158.

[3] P. D. Lax. *Selected Papers. Volume I and II.* (Eds. A. J. Majda and P. Sarnak) Springer, New York, 2005.

INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
7491 TRONDHEIM
Epost: `holden@math.ntnu.no`
Internett: `www.math.ntnu.no/~holden`

[6] The flowering of applied mathematics in America, *SIAM Review* **31** (1989) 533–541.