PETER D. LAX
EKSEMPLER FRA HANS BIDRAG TIL MATEMATIKKEN

HELGE HOLDEN

1. INNLEDNING

Peter D. Lax har gitt fundamentale bidrag til en rekke sentrale områder av matematikken. Hans bidrag inngår i en lang tradisjon der vekselvirkningen mellom fysikk og matematikk er sentral. Fysikken gir opphav til utfordrende problemer samtidig som den gir intuisjon om egenskaper ved løsningen. Matematikk kan avdekke dype, indre sammenhenger og egenskaper, og rigorøse matematiske bevis gir et solid grunnlag for vår innsikt.

John von Neumann, som hadde stor innflytelse på Lax, fastslo i 1945 at[1] "virkelig effektive høyhastighets datamaskiner kan, innenfor ikke-linære partielle differensialigninger såvel som innen mange andre områder av matematikken der matematisk analyse har liten eller ingen effekt, gi oss den heuristiske innsikten vi trenger for å få ytterligere fremskritt." Lax uttalte i 1986 at[2] "[a]nvendt og ren matematikk er nærmere knyttet sammen nå enn noen gang tidligere de siste 70 årene". Det er i denne ånd Lax har arbeidet.

Peter D. Lax

I denne korte og ikke-faglige presentasjonen vil vi fokusere på to områder, begge innenfor teorien for differensialligninger der Peter Lax har gitt fundamentale bidrag som fortsatt dominerer feltet. Vi vil her understreke Lax' bidrag der de anvendte aspektene er mest sentrale og har store konsekvenser for vårt moderne samfunn. På den måten vil vi dessverre ikke kunne diskutere hans fundamentale bidrag innenfor klassisk matematisk analyse og spredningsteori, særlig den pene *Lax–Phillips' spredningsteorien.*

Det første temaet er teorien for sjokkbølger. Sjokkbølger opptrer i mange fenomener i dagliglivet. Lettest å forklare er sjokkbølgene som oppstår når et fly bryter lydmuren eller ved eksplosjoner. Men sjokk fremkommer også i fenomener ved langt lavere hastigheter. Av spesiell interesse er flyt av hydrokarboner i porøse medier, eller, for å være mer konkret, flyt av olje i et oljereservoar. Det er velkjent at olje og vann ikke blander seg, og

Presentert i Det Norske Videnskaps-Akademi den 17. mars 2005.

[1] *Collected works of John v. Neumann*, vol. V, 1963, p. 1–32.

[2] Mathematics and its applications, *The Mathematical Intelligenzer* **8** (1986) 14–17.

overgangen, interfasen, mellom områder med olje og områder med vann er matematisk sett et sjokk. Dynamikken til sjokkene er av avgjørende betydning for utvinningen av hydrokarboner fra oljereservoarene. Men selv i dagligdagse fenomener som rushtrafikk kan man observere sjokkbølger når det er en fortetting med biler. Sjokkene kommer ikke av at bilene kolliderer, men de oppstår når tettheten til bilene gjennomgår en brå endring.

Det andre temaet er teorien for solitoner. Denne teorien har en lang og innfløkt historie, men tilhører nå sentrale deler av ren og anvendt matematikk med betydelige anvendelser innen flere områder av teknologi. Opprinnelig var denne teorien en obskur del av fluiddynamikken. Men bl.a. på grunn av oppdagelsen av *Lax-par* ble det avdekket nye og oppsiktsvekkende sammenhenger mellom flere områder av matematikken. Videre har solitonteorien funnet anvendelser innen flere ulike områder av fysikken, f.eks. i kvantefeltteorien og i faststoffysikken og som modell for biologiske systemer. I tillegg brukes solitoner for kommunikasjon i optiske fibre.

En mer omfattende diskusjon av flere aspekter ved Peter Lax' bidrag til matematikken er å finne i [1]. Et intervju med ham kan leses i [2], og en oversikt over alle hans bidrag kan studeres i hans utvalgte arbeider som nylig er gitt ut [3].

Før vi drøfter disse emnene litt mer inngående, må vi forklare hva en differensialligning er.

2. HVA ER EN DIFFERENSIALLIGNING?

For å kunne diskutere differensialligninger må vi først introdusere den deriverte. Anta at du kjører i bilen din. På kilometertelleren kan du måle avstanden fra startpunktet, og når du kjenner det, kan du bestemme posisjonen din. Den avstanden du tilbakelegger per tidsenhet kalles hastigheten og er selvsagt den du leser av på speedometeret. Matematisk er hastigheten ikke noe annet enn den deriverte av posisjonen. For å gjøre det mer presist lar vi x betegne bilens posisjon målt langs veien fra et eller annet startpunkt. Posisjonen avhenger av tiden, t, så vi skriver $x = x(t)$. Hastigheten, som vi betegner v, og som også avhenger av tiden, $v = v(t)$, er endring i posisjon i et kort tidsintervall, og matematisk kaller vi det den deriverte[3] av x, og vi skriver $x'(t)$. Dermed er $v(t) = x'(t)$.

Hvis en passasjer i bilen hele tiden skriver ned hastigheten, burde det være mulig å beregne bilens posisjon til enhver tid hvis vi kjenner tid og sted der turen startet. Vi kan gjøre det mer presist på følgende måte: Dersom vi kjenner startpunktet x_0 (og synkroniserer klokkene slik at vi starter

[3]Vi kan gjøre det mer presist på følgende måte: Anta at du kjører fra posisjon $x(t)$ ved tiden t til posisjon $x(t+s)$ i løpet av et tidsintervall s. Da er hastigheten ved tid t tilnærmet $(x(t+s)-x(t))/s$ ("hastighet er avstand delt på tid"), og tilnærmingen blir bedre jo kortere intervall s du bruker. Matematisk er hastigheten lik grensen for $(x(t+s)-x(t))/s$ når s går mot null.

ved tiden $t = 0$), dvs. $x(0) = x_0$, og vi kjenner $v(t)$ for alle tider t, burde vi være i stand til å beregne posisjonen x som en funksjon av tiden, dvs. bestemme $x = x(t)$. For å løse dette problemet, må vi løse differensialligningen $x'(t) = v(t)$.

Differensialligninger er simpelthen ligninger som involverer deriverte. Du synes kanskje at vi gjør mye ut av et lite problem. Men det viser seg at alle naturens fundamentale lover er gitt ved differensialligninger, slik følgende liste viser:

- gravitasjon (Newtons lover),
- kvantemekanikk (Schrödinger-ligningen),
- elektromagnetisme (Maxwells ligninger),
- relativitetsteori (Einsteins ligninger),
- bevegelse av gasser og væsker (Navier–Stokes' ligninger).

Planetenes bevegelser, datamaskiner, elektrisk lys, GPS (Global Positioning System) og været kan alle beskrives ved hjelp av differensialligninger.

La oss nå gå videre til et mer komplisert eksempel enn posisjon og hastighet for biler. Betrakt temperaturen i det rommet der du sitter. I ethvert punkt (x, y, z) i rommet og tid t lar vi $T = T(x, y, z, t)$ betegne temperaturen. Ved å anta at varme flyter fra varme steder til kalde steder med en rate proporsjonal med temperaturforskjellen, at varme ikke forsvinner (hvilket betyr at rommet er fullstendig isolert fra omgivelsene), og at det ikke er noen varmekilder, kan man vise at temperaturfordelingen er gitt ved den såkalte varmeledningsligningen som kan skrives

$$T_t = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}.$$

Her betegner T_t den deriverte av temperaturen med hensyn på tiden t mens T_{xx} betegner den deriverte av den deriverte, begge ganger med hensyn på romvariablen x, og tilsvarende for de andre leddene. Selv enkle problemer gir opphav til kompliserte differensialligninger! Anta at vi kjenner den initielle temperaturfordelingen, dvs. vi kjenner $T = T(x, y, z, t)$ for $t = 0$. Da sier vår intuisjon oss at temperaturen skulle være bestemt for alle senere tidspunkter. Dette kalles et initialverdiproblem. Den matematiske utfordringen er å vise at denne påstanden er riktig, og å utlede en metode for å beregne den faktiske temperaturen. Dette er den generelle problemstillingen (for mer avanserte ligninger enn varmeledningsligningen) som er kjernen i Lax' bidrag til teorien for differensialligninger.

Når vi har en differensialligning, ønsker vi ideelt at ligningen skal være velstilt i den forstand at

- problemet skal ha minst én løsning (det eksistener en løsning),
- problemet skal ikke ha mer enn én løsning (entydighet av løsningen),
- løsningen skal være stabil med hensyn til perturbasjoner (stabilitet).

De to første betingelsene sier at problemet skal ha en entydig løsning, og den tredje betingelsen sier at en liten endring i initialbetingelsene skal gi en liten endring i løsningen. Dessverre er det slik at differensialligninger normalt ikke har løsninger som er gitt ved formler, og derfor føyer vi til vår "ønskeliste" at man også skal ha en metode for å beregne en løsning. Problemet er ofte svært komplekst og krever hurtige datamaskiner for å bestemme en tilnærmet eller numerisk løsning. Løsninger på differensialligninger kan være svært kompliserte og det fins ingen enhetlig teori som innbefatter alle eller de fleste differensialligningene. Flesteparten av de interessante differensialligningene er ikke-lineære slik at summen av to løsninger ikke er en ny løsning, noe som ytterligere kompliserer situasjonen. Ulike klasser av differensialligninger krever ganske forskjellige metoder. Men selv på dette generelle nivået har Lax gitt to meget nyttige resultater som blir beskrevet i alle lærebøker på dette området. *Lax–Milgram teoremet* gir en betingelse som medfører at differensialligninger som kan beskrives ved et abstrakt variasjonsproblem, har en entydig løsning. *Lax' ekvivalensprinsipp* sier at om man har et velstilt lineært initialverdiproblem, vil enhver konsistent numerisk metode være stabil hvis og bare hvis den konvergerer. (Ekvivalensprinsippet kan f.eks. anvendes på varmeledningsligningen.)

Det er passende her å kommentere samspillet mellom matematikk og datamaskiner. Peter Lax har alltid vært en sterk talsmann for at datamaskiner er viktige for matematikk og vice versa, og han har sagt at[4] "[Hurtige datamaskiners] innflytelse på matematikk, både ren og anvendt, kan sammenlignes med den rollen teleskoper har i astronomi og mikroskoper i biologi". Den logiske konstruksjonen til datamaskiner og deres operativsystem er matematisk i sin natur. Men datamaskiner virker også som laboratorier for matematikere. Her kan du teste idéene dine: Nye matematiske relasjoner kan oppdages, og dine hypoteser og antagelser kan bli motbevist eller gjort mer sannsynlige ved bruk av datamaskiner. Lax har selv gitt eksemplet med den store amerikanske matematikeren G. D. Birkhoff som brukte hele livet på å prøve å bevise ergodehypotesen. Hvis Birkhoff hadde hatt tilgang på en datamaskin og hadde testet hypotesen på denne, ville han innsett at hypotesen ikke kunne vært riktig generelt sett. På et mer teknisk nivå krever dessuten problemene innen moderne teknologi, som simulering av kompliserte systemer som fly, oljeplattformer eller værmeldinger, ikke bare kraftige datamaskiner, men også at det utvikles nye og bedre matematiske algoritmer for at de kan løses. Faktisk er det slik at utviklingen av hurtige datamaskiner (maskinvare) og utviklingen av nye numeriske teknikker (programvare) i store trekk bidrar like mye til den totale ytelsen vi observerer i simuleringer. Peter Lax har selv gitt gjennomgripende bidrag til utviklingen av nye matematiske metoder som har satt oss i stand til å forstå og simulere viktige fenomener.

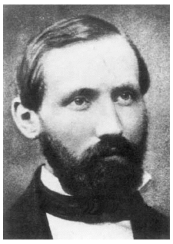
[4]The flowering of applied mathematics in America, *SIAM Review* **31** (1989) 533–541.

3. SJOKKBØLGER

I 1859 betraktet den fremragende tyske matematikeren Berhard Riemann (1826–66) følgende problem: Dersom du har to gasser med ulikt trykk skilt av en membran i en sylinder, hva skjer om du fjerner membranen? Dette problemet er senere blitt kalt Riemann-problemet, og det viser seg å være svært komplisert. Gassers dynamikk blir beskrevet av Euler-ligningene, som kan skrives[5]

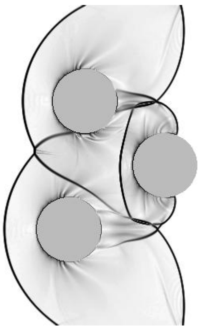
$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + P)_x &= 0, \\ E_t + (v(E+P))_x &= 0, \\ P &= P(\rho), \end{aligned}$$

der p, v, P og E betegner henholdsvis gassens tetthet, hastighet, trykk og energi. Selv i dag er fortsatt de generelle Euler-ligningene fortsatt et uløst problem.



B. Riemann

Euler-ligningene er et spesialtilfelle av en klasse av differensialligninger som kalles hyperbolske konserveringslover. Løsningen av disse ligningene er svært komplisert, som figurene viser. Ligningene er svært fundamentale innen flere områder av vitenskapen, idet de uttrykker at en størrelse er bevart eller konservert. Dette gir opphav til mange anvendelser siden masse, moment og energi i følge fysikkens lover er bevart i isolerte systemer. I tillegg til gassers bevegelse inkluderer anvendelsene flyt av olje i oljereservoarer. Et mindre opplagt eksempel er trafikkflyt i rushtrafikk på en vei uten av- og tilkjørsel; her er den bevarte størrelsen antall biler.

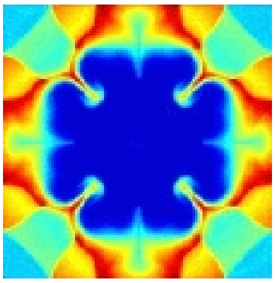


Gasstrøm forbi tre sylindre.

Hovedproblemet med hyperbolske konserveringslover, uavhengig av om de beskriver trafikkflyt eller flyt av olje i et petroleumsreservoar, er at løsningen vil utvikle singulariteter, eller diskontinuiteter, kalt sjokk. Sjokk svarer til svært raske overganger i tetthet eller trykk. Numeriske metoder har problemer med å beregne slike sjokk, og de matematiske egenskapene er svært kompliserte. De matematiske modellene tillater mer enn én løsning, og seleksjonsprinsippet, som her kalles en entropibetingelse, for å velge ut den entydige fysiske løsningen, er vanskelig. På dette punktet gjorde Riemann en feil og valgte en ufysikalsk løsning ved implisitt å anta at

[5]Riemann betraktet det noe enklere problemet der man ser bort fra den tredje ligningen, den som gjelder energien. Senket skrift angir deriverte med hensyn på angitt variabel.

entropien var bevart. Sjokkets hastighet ble bestemt av den skotske ingeniøren Rankine og den franske matematikeren Hugoniot, men det var Peter Lax som i 1957 foreslo et helt generelt og enkelt kriterium som kalles *Lax' entropibetingelse* for å velge den fysisk korrekte løsningen for generelle systemer av hyperbolske konserveringslover. De tillatte sjokkene kalles *Lax-sjokk*, og løsningen av Riemann-problemet kalles *Lax' teorem*, og det er fortsatt en hjørnestein i teorien for hyperbolske konserveringslover. Hans løsning har stimulert omfattende videre forskning på ulike entropibetingelser. Spesielt er Lax' teorem byggesteinen i løsningen av det generelle initialverdiproblemet som Glimm viste.

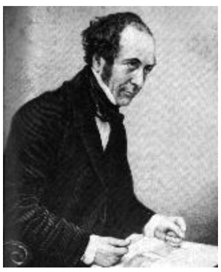


Trykkfordelingen til en gass som eksploderer i en boks.

Når man har bestemt et utvelgelsesprinsipp, må man fortsatt beregne løsningen. Her har Peter Lax introdusert to av standardteknikkene, eller "skjemaene", for å løse hyperbolske konserveringslover, nemlig det såkalte *Lax–Friedrichs skjemaet* og *Lax–Wendroff skjemaet*. Disse skjemaene er standardskjemaer for sammenligning med andre numeriske metoder. De har også vært utgangspunkt for teoretisk analyse. For eksempel ble Lax–Friedrichs skjemaet brukt av den russiske matematikeren Oleĭnik i hennes konstruktive bevis for å vise at det eksisterte løsninger av den ikke-viskøse Burgers-ligningen og at løsningene var entydige. Et annet svært nyttig resultat er *Lax–Wendroffs teorem* som sier følgende: Om et numerisk skjema for en ikke-lineær hyperbolsk konserveringslov konvergerer mot en grense, da vil grensen være en løsning av ligningen. Sammen med Glimm har Lax vist avanserte resultater for hvordan løsningen av systemer av hyperbolske konserveringslover oppfører seg når tiden blir stor.

Peter Lax' resultater innen teorien for hyperbolske konserveringslover er grunnleggende. De har løst gamle problemer og stimulert til omfattende videre forskning i feltet. Hans resultater er forsatt helt sentrale i denne delen av matematikken.

4. SOLITONER



J. Scott Russell

Teorien for solitoner kan tidfestes til august 1834 da den skotske ingeniøren John Scott Russell (1808–82) gjorde følgende observasjon: Mens han red på sin hest langs en kanal nær Edinburgh, observerte han en lekter som ble trukket av hester. Idet lekteren stoppet, kom det en isolert bølge ut fra baugen av lekteren, og Scott Russell kunne følge denne bølgen som ikke endret form, i mer enn en kilometer. Mot all intuisjon beholdt bølgen sin form over lang tid. Scott Russell var fullstendig fascinert av fenomenet, som mange må ha observert før ham uten å innse viktigheten av fenomenet, og han studerte i flere år denne bølgen som han kalte “solitær bølge”.

En moderne gjenskaping av en solitær bølge.

Hans observasjoner var kontroversielle, og flere fremstående vitenskapsmenn som Airy og Stokes tvilte på hans observasjoner. Da de nederlandske matematikerne Korteweg og de Vries i 1895 publiserte en modell for vannbølger som viste en slik oppførsel, var det imidlertid klart at fenomenet var reelt, om dog noe sært. Modellen de utledet, kalles nå Korteweg–de Vries (KdV) ligningen. For å gjøre en lang historie kort ble KdV-ligningen glemt i lengre tid, og det var ikke før Zabusky og Kruska i 1965 igjen fant den interessant, at den vakte ny interesse. I sin analyse fant de ved å benytte numeriske simuleringer at KdV-ligningen hadde løsninger som vekselvirket som partikler — de kunne kollidere uten å endre form. Zabusky og Kruskal kalte disse bølgene “solitoner” siden de hadde partikkel-lignende egenskaper som elektroner, protoner etc. (Se figuren med to solitoner.) Det var nå klart at ligningen hadde avansert struktur og et potensial for anvendelser på flere områder. I et epokegjørende arbeid fra 1967 oppdaget Gardner, Greene, Kruskal og Miura en oppsiktsvekkende metode, kalt inversspredningstransformen, for å løse KdV-ligningen. Metoden var imidlertid sterkt tilpasset KdV-ligningen og flere “mirakler” gjorde at metoden virket. Som en del av metoden studerte de en assosiert lineær ligning som hadde den egenskapen at flere viktige størrelser forble uforandret eller invariante etter som tiden endret seg. Så kom Peter Lax. Han fokuserte på invariansen for det lineære problemet, og ga to lineære operatorer, som nå kalles *Lax-par*, som viste den indre mekanismen til inversspredningstransformen. Når Lax-paret tilfredsstiller *Lax-relasjonen*, er det ekvivalent med KdV-ligningen. For å gjøre denne sammenhengen mer presis kan vi først skrive ned KdV-ligningen, som er gitt ved[6]

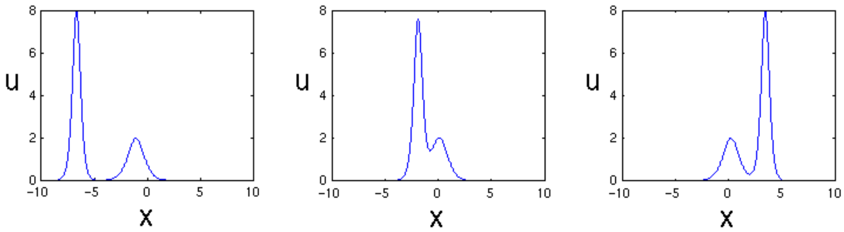
$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Lax-paret L, P er gitt ved operatorene[7]

$$L = -\partial_x^2 + u, \quad P = -4\partial_x^3 + 3u\partial_x + 3u_x,$$

[6] Variablen u angir avstanden fra bunnen til vannoverflaten i Scott Russells opprinnelige observasjon.

[7] L og P er operatorer, dvs. at de er funksjoner hvis argumenter også er funksjoner. Operatoren ∂_x^n angir den n-te deriverte av en funksjon med hensyn på variablen x.



To solitoner illustrert ved tre ulike tidspunkt. Det store solitonet tar igjen det lille, og formen på begge forblir uendret.

med den egenskapen at Lax-relasjonen[8]

$$L_t - [P, L] = L_t - (PL - LP) = u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

er tilfredsstilt. Lax-paret er konstruert slik at differensialoperatoren på venstre side som *a priori* er en komplisert differensialoperator, faktisk reduserer seg til KdV-ligningen. Ligninger med egenskaper som ligner på KdV-ligningens egenskaper, kalles fullstendig integrerbare. Med denne inngående og overraskende innsikten var det klart at inversspredningstransformen ikke var begrenset til KdV-ligningen, og at man nå måtte lete etter Lax-par for andre differensialligninger i matematisk fysikk. Sammen med null-krumningsformuleringen ("zero curvature formulation") til Zakharov og Shabat ble det i løpet av kort tid slått fast at flere av de sentrale differensialigningene i matematisk fysikk var fullstendig integrerbare, f.eks. sine-Gordon ligningen, den ikke-lineære Schrödinger-ligningen, det massive Thirring-systemet, Boussinesq-ligningen, Kadomtsev–Petviashvili-ligningen og Toda-kjeden, for bare å nevne noen få.

De spesielle egenskapene til disse ligningene har hatt enorme konsekvenser innen flere områder av matematikk og fysikk i tillegg til flere områder av teknologi. Vi kan nevne et eksempel her. Man har eksperimentert med å bruke solitoner for høyhastighets kommunikasjon i optiske fibre. Det digitale signalet benytter "enere" og "nuller", og vi kan la "enerne" bli representert ved solitoner. En sentral egenskap ved solitoner er at de er usedvanlige stabile over lange avstander. Dette gir mulighet for betydelig større kapasitet for kommunikasjon i optiske fibre over lange avstander. Videre har soliton-teorien avdekket nye og ukjente sammenhenger mellom forskjellige deler av matematikken.

[8]Utledningen er som følger: Tidsinvariansen sier at det fins en unitær operator $U = U(t)$ slik at $U^{-1}LU$ er tidsuavhengig, dvs. at den tidsderiverte er null. Om vi postulerer at U tilfredsstiller en førsteordens differensialligning $U_t = PU$ for en operator P, viser en kort utregning at Lax-relasjonen er tilfredsstilt.

Etterord. Lax anser seg selv som både ren og anvendt matematiker. Hans råd til unge matematikere er følgende:[9] "Jeg anbefaler alle yngre matematikere å prøve sine evner i anvendt matematikk. Den er en gullgruve av avanserte problemer hvis løsning krever begrepsmessige så vel som teknologiske gjennombrudd. Den viser en enorm variasjon som gir noe for enhver smak, og gir matematikere mulighet til å delta i en større vitenskapelig og teknologisk aktivitet. God jakt!"

Takk til: Portrettene av Riemann og Scott Russell er fra The MacTutor History of Mathematics Archive. Bildet av et soliton er fra The Solitons Home Page. Simuleringene er laget av K.-A. Lie (SINTEF) og X. Raynaud (NTNU).

REFERANSER

[1] The Wolf Prize to P. D. Lax. In: *The Wolf Prize in Mathematics. Volume 2.* (Eds. S. S. Chern, F. Hirzebruch) World Scientific, Singapore, 2001, p. 219–262.

[2] P. D. Lax. In: *More Mathematical People.* (Eds. D. J. Albers, G. L. Alexanderson, and C. Reid) Hartcourt Brace Jovanovich Publishers, Boston, 1990, p. 139–158.

[3] P. D. Lax. *Selected Papers. Volume I and II.* (Eds. A. J. Majda and P. Sarnak) Springer, New York, 2005.

INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
7491 TRONDHEIM
Epost-addresse: holden@math.ntnu.no
URL: www.math.ntnu.no/~holden

[9] The flowering of applied mathematics in America, *SIAM Review* **31** (1989) 533–541.