THE ABEL PRIZE 2016

Et glimt av prisvinnerens arbeid

Alex Bellos

Fermats siste teorem – problemet som fanget Andrew Wiles' fantasi som gutt, og som han tre tiår senere klarte å bevise – angir at:

> *Det finnes ikke noen positive heltall som løsning på ligningen $x^n + y^n = z^n$, der n er større enn 2.*

Teoremet fikk sitt navn fordi den franske amatørmatematikeren Pierre de Fermat skrev dette i margen på en bok omtrent i 1637, sammen med ordene: "Jeg har et virkelig bemerkelsesverdig bevis for denne setningen, men denne margen er ikke stor nok til å romme det." Denne forlokkende antydningen om et bevis fungerte som et effektivt agn for de mange generasjonene av matematikere som prøvde å finne et, men mislyktes. På tiden da Wiles var gutt, hadde Fermats siste teorem blitt det mest berømte uløste problemet i matematikken, og det var enighet om at å bevise det lå langt utenfor rekkevidden av tilgjengelige begrepsmessige redskaper.

Beviset som Andrew Wiles oppdaget i 1994, var så visst ikke det som Fermat tenkte på da han skrev ordene i margen. (Det er nå akseptert at franskmannen feilaktig trodde han hadde et bevis.) Wiles' arbeid bygger på to begreper som ble introdusert i matematikken i det attende og nittende århundre: elliptiske kurver og modulære former.

En elliptisk kurve er en ligning på formen $y^2 = x^3 + ax + b$, der a og b er konstanter. Matematikere begynte å studere disse ligningene med sikte på å beregne hvor langt planeter beveget seg i sine elliptiske baner. På begynnelsen av det nittende århundre var de imidlertid blitt interessante på grunn av sine egne iboende egenskaper, og ble blant annet gjenstand for Niels Henrik Abel og andres arbeider.

Modulære former er et matematisk objekt av en mye mer abstrakt art. De er en viss type avbildning på en viss type graf som oppviser et ekstremt høyt antall symmetrier.

Elliptiske kurver og modulære former hadde ingen åpenbar forbindelse med hverandre. De var forskjellige felt som sprang ut av forskjellige ligninger og ble studert av forskjellige personer som brukte forskjellig terminologi og forskjellige teknikker. Til tross for dette fikk to japanske matematikere, Yutaka Taniyama og Goro Shimura, i 1950-årene en ide som syntes å komme ut av tomme luften: at på et dypere nivå var feltene likeverdige. De to japanerne foreslo at hver elliptiske kurve kunne knyttes til sin egen modulære form, en påstand kjent som Taniyama-Shimura-formodningen. Dette var et overraskende og radikalt forslag, og ingen hadde noe begrep om hvordan det kunne bevises.

I 1984 knyttet den tyske matematikeren Gerhard Frey for første gang sannheten i Fermats siste teorem til sannheten i Taniyama-Shimura-formodningen. Som nevnt ovenfor sier teoremet at det ikke finnes noen heltallige løsninger for $x^n + y^n = z^n$, der n er større enn 2. Frey viste at hvis du antar at dette utsagnet er *usant*, kan du skape en elliptisk kurve som er så merkelig at den ser ut til å ha en tilknyttet modulær form. To år senere beviste amerikaneren Ken Ribet at Freys antakelse var korrekt: Hvis Fermats siste teorem er usant, finnes det en elliptisk kurve som ikke har noen tilknyttet modulær form, og da er med andre ord *også* Taniyama-Shimura -formodningen usann.

Frey og Ribet arbeid innebar også moteksempelet som argument, at dersom Taniyama-Shimura-formodningen er sann, kan ikke Fermats siste teorem være usant, men derimot også være sant. Fra da av var alt som var nødvendig for å bevise Fermats siste teorem, å bevise Taniyama-Shimura-formodningen.

Imidlertid var det ingen som visste hvordan denne bragden kunne utføres, og det var ingen ting som tydet på at dette ville være noe enklere enn å bevise Fermats siste teorem. Kanskje det at teoremet og formodningen tilsvarte hverandre, betydde at begge deler var umulig? Andrew Wiles, som var spesialist på både elliptiske kurver - temaet for hans doktoravhandling - og modulære former, hadde i det minste den rette bakgrunnen for å gi seg i kast med problemet. Og etter åtte år med intense studier beviste Wiles at formodningen var sann.

Wiles' originale og dristige bevis er ansett som en av den moderne matematikkens største triumfer. Det kan skisseres som følger: Hver elliptiske kurve har en tallsekvens som definerer den, på samme måte som hver modulære form. Wiles viste at hver sekvens som tilhører en elliptisk kurve, kunne jamføres nøyaktig med sekvensen som tilhørte en modulær form. For å gjøre dette utformet han et sett med redskaper basert på arbeidet til 1800-talls matematikeren Évariste Galois, som oppdaget symmetriene som springer ut av løsningene på visse ligninger.

Beviset for Taniyama-Shimura-formodningen, et resultat som nå er kjent som modularitetsteoremet, betydde at Wiles også hadde bevist Fermats siste teorem, og dermed brakt et kapittel i matematikkens historie som begynte 350 år tidligere, til sin avslutning. Men effekten av modularitetsteoremet på matematikken har vært større enn bare det å løse en gammel og berømt gåte: Den har vært enorm. Wiles demonstrerte en fundamental, strukturell forbindelse mellom elliptiske kurver og modulære former, et rikt og betydelig resultat innen tallteori med mange dyptgående konsekvenser. Han utviklet også et effektivt begrepsmessig redskapssett som gjennom de to siste tiårene har vært brukt av andre matematikere på spektakulære måter.