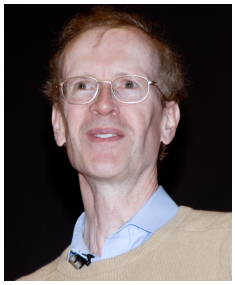


Sir Andrew John Wiles, Abelprisvinner 2016

ABELs BREV TIL HOLMBOE

Sommeren 1823 besøkte den unge Niels Henrik Abel matematikeren Carl Ferdinand Degen i København. I et brev til sin gamle lærer Bernt Michael Holmboe skriver Abel om sine matematiske undersøkelser og diskusjoner med Degen:

Den lille Afhandling som Du erindrer handlede om de omvendte Functioner af Transcendantes elliptiqves, og hvori jeg havde beviist noget umueligt har jeg bedet ham læse igjennom; men han kunde ikke opdage nogen Feilslutning, eller begribe hvori Feilen stak; Gud veed hvorledes jeg skal komme ud deraf.

Det Abel refererer til i dette brevet er hans innledende undersøkelser av elliptiske funksjoner, et tema han jobbet videre med i senere avhandlinger. Elliptiske kurver er en matematisk disiplin som baserer seg på Abels oppdagelser av elliptiske funksjoner. Modularitetsteoremet gir en dyp sammenheng mellom elliptiske kurver og modulære former. Dette gir en interessant kopling mellom Abel og Andrew Wiles.

Mot slutten av det samme brevet forklarer Abel Holmboe hva han har drevet med den siste tiden. Han skriver:

Foruden at jeg læser arbeider jeg ogsaa selv. Saaledes har jeg søgt at bevise Umuligheden af Ligningen $a^n = b^n + c^n$ ***i hele Tal naar*** n ***er større end 2; men jeg har jeg været hældet. Jeg har ikke kommet videre end til indlagte Theoremer, som ere snorrige nok.***

Abel lister opp fire teoremer, alle uten bevis. Vi gjengir to av dem, Theorem I og Theorem III:

Theorem I.

Ligningen

$$a^n = b^n + c^n$$

hvor n *er et Primtal er umuelig naar een eller flere af Størrelserne:*

$$a,\ b,\ c,\ a+b,\ a+c,\ b-c,\ \sqrt[m]{a},\ \sqrt[m]{b},\ \sqrt[m]{c}$$

ere Primtal.

Theorem III.

For at Ligningen

$$a^n = b^n + c^n$$

skal være muelig maa a *have een af følgende tre Former*

$$1)\ a = \frac{x^n + y^n + z^n}{2}$$

$$2)\ a = \frac{x^n + y^n + n^{n-1}z^n}{2}$$

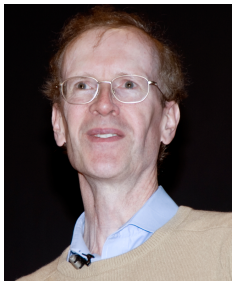
$$3)\ a = \frac{x^n + n^{n-1}(y^n + z^n)}{2}$$

hvor x *og* y *og* z *ingen fælleds Factorer maa have.*

Dette knytter et nytt matematisk bånd mellom Abel og Wiles.

Brevet til Holmboe er skrevet sommeren 1823. Det er imidlertid vanskelig å fastslå en eksakt datering. Grunnen til det er at Abel angir datoen på følgende måte:

$$\sqrt[3]{6.064.321.219}$$



Sir Andrew John Wiles, Abelprisvinner 2016

og føyer til ***tag Decimalbrøken med***. Gjør vi det får vi

$$1823,59083$$

Vi trekker fra 1823, og regner ut

$$0,59083 * 365 = 215,65$$

Dag nr. 216 i året 1823 er 4. august, som antas å være datoen Abel har datert brevet.

Som en siste kuriositet, med hentydning til at årets Abelpris-vinner er født i England, gjengir vi følgende setning fra brevet:

Bibliothekerne ere ikke godt forsynede med mathematiske Bøger; men de besidde en god Deel Videnskabers Selskabs Skrifter. I blandt andre Philosophical transactions, hvori findes mange meget gode Sager; saa at Engellænderne ikke ere saa daarlige i Mathematiken som jeg havde tænkt.

Vi skal gi et bevis for Theorem I i tilfellet hvor a er et primtall.

Vi antar at n er et primtall som er større enn 2, så det er uansett et oddetall. Det gir

$$a^n = b^n + c^n = (b+c)(b^{n-1} - b^{n-2}c + \cdots + c^{n-1})$$

Siden a er et primtall, så må $b+c$ være delelig med a. Det gir at

$$c \equiv -b \pmod{a}$$

og vi får

$$b^{n-1} - b^{n-2}c + \cdots + c^{n-1} \equiv nb^{n-1} \equiv 0 \pmod{a}$$

Siden n er et primtall må vi ha $n = a$ eller $b \equiv 0 \pmod{a}$. Hvis a deler b, så vil a også dele c. Men dette strider mot at a, b og c ikke har noen felles faktor. Dermed får vi $n = a$, og

$$b^n + c^n \equiv b + c \equiv 0 \pmod{n}$$

Vi har også at $b, c \leq n$, og derfor må vi ha $b + c = n$. Det gir

$$b^n + c^n = n^n = (b+c)^n = b^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} b^{n-i} c^i + c^n$$

og summen av positive ledd

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} b^{n-i} c^i = 0$$

noe som opplagt gir oss en motsigelse.