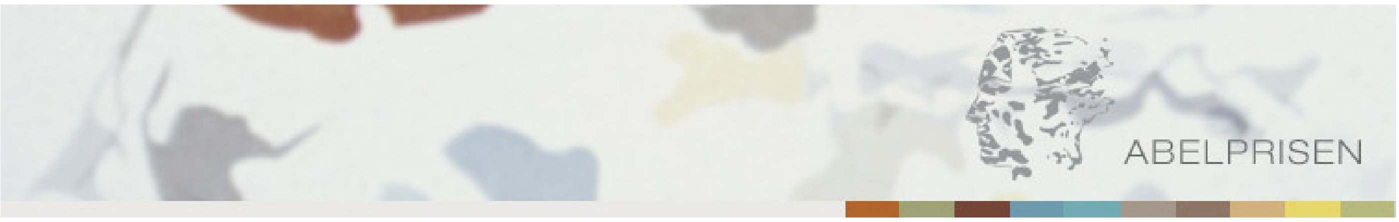
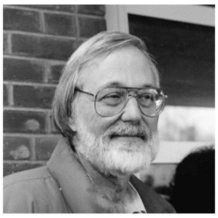


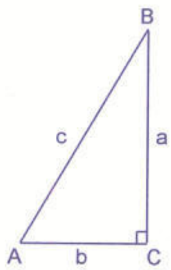


Abelprisvinner 2011
John Willard Milnor

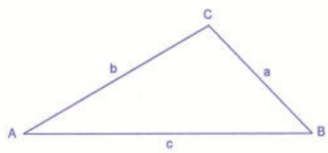
Topologi vs. geometri

Mye matematisk forskning dreier seg om klasifikasjon av matematiske objekter, det være seg former eller ordnede mengder eller strektegninger. Klassifikasjon som metode er imidlertid ikke noe som kun har med forskning å gjøre, det er noe vi alle gjør hele tiden. Vi klassifiserer mennesker etter kjønn eller alder, dyr etter rase og snø etter temperatur og konsistens. Hovedpoenget med all klasifikasjon er å fortelle hvilke objekter som skal være i samme klasse, dvs. definere ekvivalenskriterier. Forskjellen på topologi og geometri har med klassifikasjon å gjøre.

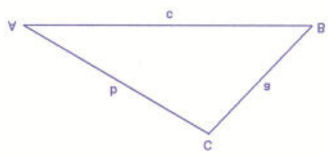
Klassifikasjon av trekanter
Dette er en trekant:



Dette er også en trekant:



Og dette er en trekant.



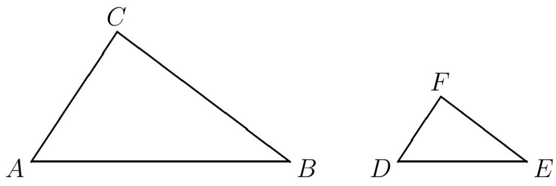
Tre nokså uilke figurer forsvarer alle navnet trekant. Og årsaken er åpenbar, selv om figurene er forskjellige har de det til felles at de består av tre rette kanter. Alt som har tre rette kanter kalles trekanter. Dette er en hensiktsmessig måte å klassifisere figurer som er satt sammen av rette kanter, såkalte mangekanter. Vi simpelthen teller antall kanter, og får trekanter, firkanter osv.
Mangekanter har en del egenskaper som er matematisk viktige, men som vi ikke nødvendigvis tenker på i dagliglivet.
Egenskap nr. 1 for mangekanter:
Man må se hele figuren for å kunne fastslå hvor mange kanter figuren har.
Dersom man bare ser et lite utsnitt av det indre området av en mangekant er det umulig å fastslå hvor mange kanter figuren har. Det å være en mangekant kalles en global egenskap. Det motsatt er en lokal egenskap. Et eksempel på en lokal egenskap er vinkelstørrelse. Det vi trenger for å måle en vinkelstørrelse er en ørliten omegn om toppunktet på vinkelen.
Egenskap nr. 2 for mangekanter:
Størrelse og form er uvesentlig.
Slik vi så det innledningsvis for trekantene, er det uendelig mange former som inngår i begrepet trekant. Når vi snakker om trekanter bryr vi oss ikke om lengder eller vinkler. Det er kun det ytre omrissets natur (satt sammen av rette linjer) og antall kanter som teller. Det betyr at spørsmålet om en figur er en trekant, ikke er et geometrisk

spørsmål, i den presise forstand av begrepet geometri. Geometri dreier seg nemlig om former og figurer og måling av lengder og vinkler. Det vi driver med når det gjelder trekantene er mer i retning av topologi, av det greske topos, som betyr sted og logos, som man kan oversette med lære.
Topologi som matematisk vitenskap sies å ha blitt grunnlagt av Henri Poincare mot slutten av 1800-tallet, men har klare røtter tilbake til Gauss, i det som kalles Gauss-Bonnets teorem og som sier at hvis vi summerer opp krumningen til alle punkter på en ballong, så er denne summen uavhengig av om vi lar ballongen være kulerund eller om vi klemmer på den. Hvis vi presser fingeren inn i en ballong, så vil krumningen i området rundt fingerne endre seg, til dels dramatisk, men det jevner seg ut over hele ballongen, noen steder blir det større krumning, noen steder blir det krumning motsatt vei, og andre seteder igjen blir krumningen mindre. Men Gauss sier at totalen blir uforandret. Totalkrumning er dermed en global egenskap, og faktisk kun avhengig av den topologiske klassen til ballongen.

Kongruens av trekanter
Vi har en annen kjent egenskap knyttet til trekanter. Vi sier at to trekanter er kongruente dersom de to trekantene har parvis like store vinkler og parvis like store sidekanter.
Dette gir oss to forskjellige måter å klassifisere trekanter i planet. I det ene tilfellet sier vi at alle trekanter er i samme klasse, i det tilfellet holder det at trekantene er trekanter. Det finnes mao. kun én trekant. Den andre måten å klassifisere trekanter krever mye mer for at to trekanter skal være ekvivalente, nemlig at de er kongruente. Hvor mange trekanter i planet har vi da? Hvert hjørne kan beskrives av et 2-dimensjonalt parameterom, så til sammen for de tre hjørnene gir det et 6-dimensjonalt rom. I dette rommet finnes det et 5-dimensjonalt underrom der alle tre hjørnene ligger på linje (to velges fritt og det tredje har én frihetsgrad, langs med linja gjennom de to andre punktene). Dette underrommet tar vi bort siden det ikke gir oss trekanter. I tillegg kan vi bytte rundt på de tre hjørnene, så generelt er det 6 symmetrier. I alle tilfelle sier vi at to trekanter er ekvivalente dersom de kan flyttes over i hverandre. Det er et 2-dimensjonalt rom av forflytninger som gir oss ekvivalenser. Vi ender opp med et 4-dimensjonalt rom, tatt bort et 3-dimensjonalt underrom, delt ut med alle rotasjoner og speilinger. Alt i alt får vi et 3-dimensjonalt rom av kongruente trekanter i planet, der vi har fjernet noen degenererte tilfeller og delt ut med noen endelige symmetrier. De tre dimensjonene kan vi gjerne tolke som de tre avstandene mellom hjørnene i trekanten. For kongruente trekanter vil disse avstandene være parvis like store, og er de ikke parvis like store, så er ikke trekantene kongruente.

Formlike trekanter
En mellomløsning mellom at alle trekanter er ekvivalente og at kun kongruente trekanter er ekvivalente er å kreve formlikhet. Formlikhet betyr at alle vinklene i trekantene er parvis like store, men størrelsen på trekantene kan være forskjellig. Det gir at rommet av alle formlike trekanter er en dimensjon mindre enn rommet av kongruente trekanter, altså 2-dimensjonalt, og fortsatt må vi ta høyde for en endelig mengde symmetrier. Dersom de tre sidekantene i trekanten har lengde *a, b* og *c,* så vil det 2-dimensjonale rommet av formlike trekanter ha parametre a/c og b/c. Husk imidlertid på at uansett klassifikasjonsmetode, forblir trekantene de samme. Forskjellen ligger i hvilke vi betrakter som ekvivalente.

Hva med Milnor?
Når Milnor snakker om at 7-dimensjonale sfærer er homeomorfe, men ikke diffeomorfe, er det slike vurderinger som ligger til grunn. Det skal mindre til for å være homeomorf enn diffeomorf, akkurat som det skal mindre til å være formlik enn kongruent.



To formlike trekanter