Variasjonsregning

Variasjonsregning som matematisk disiplin har sin opprinnelse på 1600-tallet med Isaac Newton i en hovedrolle. Newton utviklet teorien med det formål å løse *det minimale motstands-problemet* og senere *brakistokron-problemet.*

Det minimale motstands-problemet dreier seg om å finne formen på et legeme som beveger seg gjennom vann med minst mulig motstand.

Brakistokron-problemet, først formulert av Johann Bernoulli, handler om å finne en kurve som forbinder to punkter i rommet, slik at en kloss som sklir langs med kurven bruker kortest mulig tid mellom endepunktene. Ved start ligger klossen i ro, og farten på klossen påvirkes kun av et homogent gravitasjonsfelt.

Newtons variasjonsregning ble videreutviklet av Leonhard Euler og Joseph-Louis Lagrange og den generelle målformuleringen for disiplinen er som følger;

La J være en funksjonal som tilordner en verdi til hver funksjon i et gitt funksjonsrom. Finn en funksjon som minimaliserer J.

Et eksempel på bruk av variasjonsregning er problemet med å finne den korteste veien mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) i planet. La $y = f(x)$ være en funksjon som forbinder de to punktene; vi setter $y_1 = f(x_1)$ og $y_2 = f(x_2)$. Buelengden til kurven definert av funksjonen f er gitt ved

$$J(f) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Målet vårt er å minimere lengden til kurven, det vil si å finne en funksjon f som gir oss et minimumspunkt for J.

Et resultat av Euler og Lagrange sin interesse for variasjonsregning er den såkalte Euler-Lagrange-likningen. Likningen gir en generell løsning av variasjonsproblemet. Teoremet sier at for å finne en kritisk funksjon for funksjonalen

$$J(f) = \int_S L(f, f', x)\, dx$$

hvor L er en funksjon i x, $f(x)$ og den deriverte funksjonen $f'(x)$, og S er integrasjonsområdet, er det nødvendig å finne en løsning av Euler-Lagrange-likningen;

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} = 0$$

I eksemplet over er funksjonalen L gitt ved $L(f, f', x) = \sqrt{1 + (f')^2}$. Det gir

$$\frac{\partial L}{\partial f} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{f'}{\sqrt{1 + (f')^2}}$$

og ved å sette dette inn i Euler-Lagrange-likningen;

$$-\frac{d}{dx}\frac{f'}{\sqrt{1 + (f')^2}} = 0$$

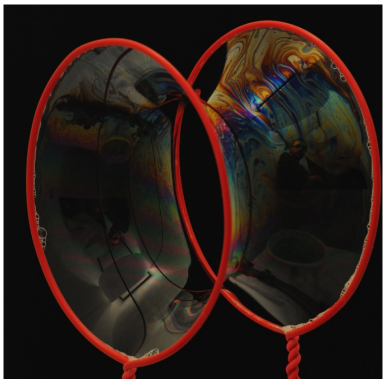
Den betyr at

$$\frac{f'}{\sqrt{1 + (f')^2}} = c\ (konstant)$$

Ved å løse med hensyn på f', finner vi at også $f'(x)$ må være konstant, det vil si at $f(x) = ax + b$. Løsningen uttrykker det faktum at den korteste avstanden mellom to punkter er langs en rett linje.

Minimalflater er et eksempel på en anvendelse av variasjonsregning i høyere dimensjoner. La $f : S \to M$ være en (tlistrekkelig glatt) avbildning av en flate S inn i en mangfoldighet M, som vi godt kan la være det Euklidske 3-rommet. Anta at det er to hull i M og at flaten $f(S)$ omslutter de to hullene. Problemet går ut på å finne en flate som oppfyller disse kravene og som samtidig har minimalt areal. Siden vi krever at flaten omslutter de to hullene er det ikke mulig at flaten kan krympe til noe med areal 0, og vi kan håpe på at det er mulig å finne en flate med minimalt areal.

Vi skal se på et eksempel som ligger tett opp til den situasjonen vi akkurat har beskrevet. Vi betrakter to parallelle sirkler av gitt radius og innbyrdes avstand. En flate formet som en buet sylinder forbinder de to sirklene.



[1] *En såpefilm som forbinder to parallelle sirkler.*

Hvis vi antar at flaten er symmetrisk om aksen som forbinder sentrene i de to sirklene og formet ved å rotere funksjonen $y = f(x)$ om denne aksen, så vil arealet av "såpesylinderen" være gitt ved

$$A(f) = \int_S 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Vi setter funksjonalen $L(f, f', x) = f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$ inn i Beltramis versjon av Euler-Lagrange-likningen (som benytter seg av at $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$) og finner at den minimaliserende funksjonen må tilfredsstille

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} - \frac{f(x)f'(x)^2}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}\right) = 0$$

eller ekvivalent

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = c$$

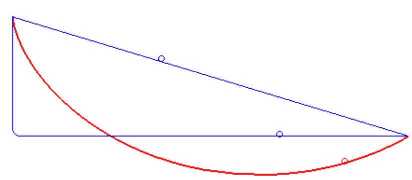
Løsningen av denne differensiallikningen er "kjedelinjen";

$$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

Kjedelinjen er også kjent som "hengende kabelkurve", det vil si kurven som en idealisert hengende kabel danner når den kun er påvirket av sin egen vekt, og kun festet i endepunktene. Omdreining av kjedelinjen rundt aksen gir katenoide-flaten. Minimalflaten mellom de to parallelle sirklene danner dermed en katenoide.

[2] *Et edderkoppnett er satt sammen av tynne, men sterke hengende kabler.*

La oss vende tilbake til brakistokron-problemet. Selv om den rette linja er den korteste veien mellom de to punktene, er det ikke den raskeste. I starten må vi opparbeide oss fart, og velger derfor en brattere rute. Konsekvensen av dette er at veien blir lenger, men vi sparer tid fordi den forlengede veien kompenseres av høyere hastighet.



De tre klossene ble sluppet samtidig fra toppen. Den røde kommer først fram.

Tiden vi bruker fra et punkt P til et punkt Q langs kurven $\gamma : y = f(x)$ er gitt ved integralet

$$T(\gamma) = \int_P^Q \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2f(x)}} dx$$

(gravitasjonskonstanten er for enkelthet skyld satt til $g = 1$).

Euler-Lagrange-likningen sammen med Beltrami-identiteten gir oss en differensiallikning for løsningen $y = f(x)$ gitt ved

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2f(x)}} - \frac{f'(x)^2}{\sqrt{1 + f'(x)^2}\sqrt{2f(x)}}\right) = 0$$

eller litt forenklet

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}\sqrt{2f(x)}} = c$$

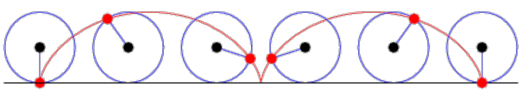
som vi kan skrive

$$\left(1 + f'(x)^2\right) f(x) = k^2$$

hvor $k = \frac{\sqrt{2}}{2c}$. Løsningen av denne likningen gis best ved en parametrisert kurve

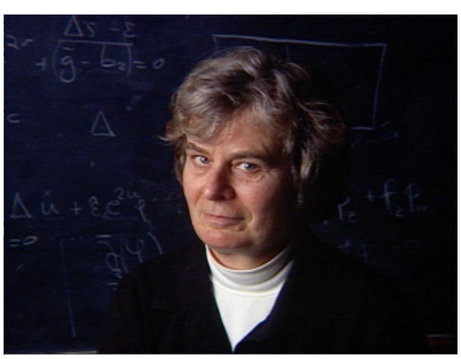
$$x = \frac{1}{2}k^2(\theta - \sin\theta), \quad y = \frac{1}{2}k^2(1 - \cos\theta)$$

Kurven beskriver en sykloide. En sykloide er den samme kurven som et punkt på et hjul beskriver når hjulet triller langs en rett linje uten å skli.



Variasjonsregningens historie er nært knyttet til matematikkens utvikling. Mange framstående matematikere har gitt sine bidrag til teorien. Vi har allerede nevnt Isaac Newton, Johann Bernoulli, Leonhard Euler og Joseph-Louis Lagrange. Senere matematikere som Hamilton, Jacobi, Dirichlet og Hilbert har også bidratt. Inn i en moderne tid har variasjonsregningen fortsatt å være et sentralt matematisk forskningsfelt med store teoretiske nyvinninger, såvel som langt-rekkende anvendelser innen fysikk, ingeniørvitenskap og andre matematiske felt.

Minimeringsproblemer som kan forstås gjennom variasjonsregning ligger veldig ofte bak karakterisering av likevekts-tilstander for kontinuerlige fysiske systemer, som elastisitetsproblemer, faststoff- og fluid mekanikk, elektromagnetisme, gravitasjon, kvantemekanikk, streng-teori og mange andre.



Karen Uhlenbeck, vinner av Abelprisen for 2019