



THE ABEL PRIZE 2020

Virrevandring, en strategi for å finne skjulte skatter, – for hunder så vel som for matematikere

Hvis du gjemmer en godbit i hagen og slipper hunden løs for å finne den, vil hun raskt sette i gang å lete. Letingen kan kanskje virke nokså tilfeldig på oss; hunden er tilsynelatende ikke noen stor tilhenger av det vi ville oppfatte som et mer systematisk søk. Men likevel, etter kort tid finner hun belønningen. Instinktet hennes forteller henne at det å bruke en slags tilfeldighetenes søketeknikk, der retningen på søket stadig og på en tilfeldig måte endres, er en målrettet og fornuftig strategi for å finne gjemte godbiter.

Den matematiske analogien til hundens adferd ligger i begrepet virrevandring. Virrevandring handler om å beskrive baner bestående av en rekke tilfeldige trinn i matematiske rom. Det finnes mange eksempler på fysiske systemer som er modellert av virrevandring; oppførselen til gassmolekyler, aksjemarkeder, statistiske egenskaper til genetisk drift og nevronfyring i hjernen, for å nevne noen. Men virrevandring kan også sees på som et verktøy å utforske et matematisk objekt i seg selv, på samme måte som hunden prøver å forstå hagen. Harry Furstenberg og Gregory Margulis bruker ikke virrevandring for å finne godbiter i hagen. De gjør det for å avsløre hemmelighetene til matematiske objekter som for eksempel vilkårlige og komplekse grafer eller grupper.

En populær familie av matematiske objekter er de såkalte Lie-gruppene, oppkalt etter den norske matematikeren Sophus Lie (1842 –1899). Lie-grupper beskriver symmetriene til geometriske objekter, som for eksempel rotasjonssymmetri i tre dimensjoner. Sophus Lie lot seg inspirere av tidligere arbeider av Niels Henrik Abel og

Évariste Galois om løsninger av algebraiske ligninger. Abels bevis for at man ikke kan finne noen formel for løsningen av en generell femtegradsligning, og Galois' banebrytende teori for å koble løsninger av polynom-ligninger til automorfismegrupper av algebraiske kroppsutvidelser, er begge strålende eksempler på hvordan man kan forstå detaljene ved å utvide horisonten. Lies tanke var å introdusere tilsvarende teknikker for å studere symmetrier av differensallikninger. Ertertiden har sett det som en viktig oppgave å prøve å forstå strukturen til disse Lie-gruppene, for på den måten å nærme seg løsningen av de underliggende differensalligningene.

Furstenberg og Margulis har gjennom å introdusere nye begreper og å finne bevis for viktige påstander gitt betydelige bidrag til vår forståelse av Lie-grupper. Generelt er Lie-grupper uendelige og ikke-kompakte, dvs. uansett hvordan vi snur og vender på dem, så vil gruppene ha noe ubegrenset over seg. Det viser seg at virrevandrings-teknikker gir oss svært gode verktøy til å avdekke egenskaper ved objekter som på en eller annen måte brer seg i alle retninger.

Hvis hunden vår følger en ergodisk bane, vil hun alltid ende opp med å finne godbiten. Begrepet ergodisitet innebærer at hvis vi tegner en sirkel rundt godbiten, med vilkårlig liten radius, vil virrevandrings-banen før eller siden sneie innenfor sirkelen. Dette er et eksempel på begrepet rekurrens (eller tilbakevending) for et dynamisk system. Rekurrens av et dynamisk system har sitt opphav i arbeidet til Henri Poincaré mot slutten av det nittende århundre. Han beviste at under visse forhold vil et dynamisk system



alltid komme tilbake til en hvilken som helst tilstand, eller i det minste nesten tilbake. Nesten tilbake til en tilstand betyr ikke at vi treffer, men at vi kommer så nær tilstanden vi bare vil. For generell virrevandring på grupper kan vi koble spørsmålet om tilbakevending til størrelsen, eller "ubegrensetheten" av gruppen. Hvis gruppen er "for stor", er det lite sannsynlig at tilbakevending vil forekomme under virrevandringen, og omvendt.

Den matematiske arven etter Harry Furstenberg og Gregory Margulis inneholder mange ideer og resultater som baserer seg på ergodeteori, Lie-grupper og virrevandring. Harry Furstenberg introduserte Furstenberg-render og disjunkthet, og Margulis kom opp med begrepet super-rigiditet og sitt normale undergruppe-teorem. Margulis ga også et bevis for Oppenheim-formodningen, angående heltallige nesten-løsninger av kvadratiske likninger i tre variabler og Furstenberg bekreftet Andre Szemerédis teorem om eksistensen av aritmetiske progresjoner av hvilken som helst lengde ved bruk av ergodisk teori. De to siste eksemplene er gode illustrasjoner på hvordan de to vinnerne utnytter det brede nedslagsfeltet for metoder fra sannsynlighetsteori og effektiviteten av sprengte grensene mellom separate matematiske disipliner, som Abel-komiteen påpeker i sin begrunnelsen for tildelingen av årets Abelpris.

Den matematiske hagen har mange skjulte skatter og arbeidet til årets Abel-prisvinnere kan tyde på at virrevandring er en god strategi for å finne noen av dem.

