Théorèmes ~~Recherches~~ sur les fonctions elliptiques

(par M. N. H. Abel)

Berl. $\frac{8}{9}$ 28.

~~Second Mémoire~~

Dans les recherches sur les fonctions elliptiques, insérées dans le tome second de ce journal j'ai fait voir comment on pourra toujours résoudre l'équation du degré $(2n+1)^2$ d'où dépend la division en $2n+1$ parties égales d'une fonction elliptique; mais je me suis contenté à démontrer seulement la possibilité d'une telle résolution, sans entrer dans des détails sur l'expression des racines. Une note de M. Jacobi inséré dans le T. III p. 86 m'a fait revenir sur cet objet, et étant parvenu à cette occasion à plusieurs propriétés nouvelles des fonctions elliptiques je vais continuer ici mes premières recherches.

~~§1.~~

En faisant $\varphi\theta = x$ on aura selon ce qu'on a vu dans le § III du mémoire cité

$$1 \ldots\ldots \quad \varphi(2n+1)\theta = R$$

où R une fonction rationnelle de x, le numérateur étant du degré $(2n+1)^2$ et le dénominateur du degré $(2n+1)^2-1$. L'équation est donc du degré $(2n+1)^2$ et les racines pourront être représentées par la formule:

$$2 \ldots \quad x = \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right)$$

en donnant à m et μ ~~toutes les valeurs entières depuis ... jusqu'à~~

~~Et~~ Soient pour abréger $3 \ldots \frac{\omega}{2n+1} = \alpha$, $\frac{\varpi i}{2n+1} = \beta$ l'expression des racines sera:

$$4 \ldots \quad x = \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$$

Cela posé nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 1. Soit $\psi\theta$ une fonction entière quelconque des quantités $\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$ qui reste la même en changeant θ en $\theta+\alpha$ et en $\theta+\beta$. Soit ν l'exposant le plus grand de la quantité $\varphi\theta$ dans la fonction $\psi\theta$, on aura toujours:

$$5 \ldots\ldots \quad \psi\theta = p + q \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$$

où p et q sont deux fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la second du degré $\nu-2$.

Démonstration. En vertu de la formule (10) pag 105 on a

$$\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{\varphi\theta \cdot f(m\alpha+\mu\beta) \cdot F(m\alpha+\mu\beta) + \varphi(m\alpha+\mu\beta) \cdot f\theta \cdot F\theta}{1 + e^2c^2 \cdot \varphi^2(m\alpha+\mu\beta) \cdot \varphi^2\theta}$$

d'où il suit qu'on pourra exprimer $\psi\theta$ rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta \cdot F\theta$. Or le carré de $f\theta \cdot F\theta$ est rationnelle en $\varphi\theta$ savoir $(f\theta \cdot F\theta)^2 = (1-c^2\varphi^2\theta)(1+e^2\varphi^2\theta)$ donc on pourra faire ensorte que l'expression de $\psi\theta$ ne contienne ~~que~~ la quantité $f\theta \cdot F\theta$ qu'à la première puissance. On pourra donc faire:

2.)

$$7. \quad \psi\theta = \psi_1\{\varphi\theta\} + \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta$$

où $\psi_1\{\varphi\theta\}$ et $\psi_2\{\varphi\theta\}$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$. –

Si l'on met $\omega-\theta$ à la place de θ on aura en remarquant que $\varphi(\omega-\theta)=\varphi\theta$, $f(\omega-\theta)=-f\theta$; $F(\omega-\theta)=F\theta$:

$$8. \ldots \quad \psi(\omega-\theta) = \psi_1\{\varphi\theta\} - \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta$$

des équations 7 et 8 on deduit :

$$9 \ldots \psi_1\{\varphi\theta\} = \tfrac{1}{2}.\{\psi\theta+\psi(\omega-\theta)\} \; ; \; \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta = \tfrac{1}{2}.\{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)\} \ldots 10$$

Considerons d'abord la fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$. En y mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ il viendra :

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \tfrac{1}{2}.\{\psi(\theta+\alpha)+\psi(\omega-\alpha-\theta)\}$$

or on a $\psi(\theta+\alpha)=\psi\theta$ et par consequent aussi en mettant $\omega-\alpha-\theta$ au lieu de θ $\psi(\omega-\theta)=\psi(\omega-\alpha-\theta)$ donc $\psi_1\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \tfrac{1}{2}\{\psi\theta+\psi(\omega-\theta)\}$ c'est-à-dire

$$\psi_1\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}$$

on aura de la même manière : $\psi_1\{\varphi(\theta+\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}$

La première de ces équations donne en mettant successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha$, ... au lieu de θ $\;11\ldots\; \psi_1\{\varphi(\theta+m\alpha)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}$ où m est un nombre entier quelconque. De même la seconde équation donne $\psi_1\{\varphi(\theta+\mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}$ d'où l'on tire en mettant $\theta+m\alpha$ au lieu de θ et ayant égard à l'équation 11.

$$12 \ldots \quad \psi_1\{\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}$$

La fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$ reste donc la même en substituant au lieu de $\varphi\theta$ une autre racine quelconque de l'équation (1). – La formule (12) donne en attribuant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zero jusqu'à n et puis ajoutant :

$$13. \quad \psi_1\{\varphi\theta\} = \frac{1}{(2n+1)^2}\sum_0^n{}_m \sum_0^n{}_\mu .\ \psi_1\{\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)\}$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symetrique des racines de l'équation (1) donc on pourra l'exprimer rationnellement en les coefficiens de cette équation c'est-à-dire en $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

$$\psi_1\{\varphi\theta\} = p$$

La quantité p sera une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$. Or je dis que p doit toujours être entière. En effet soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ et $p=\frac{p'}{q'}$ où p' et q' sont des fonctions entières de y sans diviseur commun. Soit $y=\varphi(2n+1)\delta$ une racine de l'équation $q'=0$; la quantité $p = \tfrac{1}{2}\{\psi\theta+\psi(\omega-\theta)\}$ sera infinie en faisant $\theta=\delta$ donc on doit avoir $\psi\delta+\psi(\omega-\delta)=\frac{1}{0}$ maintenant il est evident par la forme de la fonction $\psi\theta$ que cette equation ne peut pas subsister à moins qu'une quantité ~~fonction~~ de la forme $\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta)$ ou $\varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta)$ ~~soit infinie~~ ait une valeur infinie. ~~Or~~ Soit donc $\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta)=\frac{1}{0}$ on aura en vertu de l'équation 30 pag 113: $\delta = (m'+\frac{1}{2})\omega + (n'+\frac{1}{2})\varpi i - m\alpha - \mu\beta$ où m' et n' sont des nombres entiers; or cette valeur de δ donne:

$$\varphi(2n+1)\delta = \varphi\left\{[(2n+1)m'+n-2m]\omega + [(2n+1)n'+n-2\mu]\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right\}$$

c'est-à-dire (26 pag 111) $\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{0}$. or cela est impossible car une racine quelconque de l'équation $\varphi' = 0$ doit être finie. On trouvera de même que $\varphi(\omega - \delta + m\alpha + \mu\beta)$ donnera $\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{0}$. La quantité p est donc une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. —

Considerons maintenant l'équation (10). En divisant les deux membres par $f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$ on aura:

$$\frac{\psi_2\{\varphi\theta\} \cdot f\theta \cdot F\theta}{f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi\theta - \psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta}$$

Comme on a vu les pag 117 on aura $f(2n+1)\theta = f\theta \cdot u$, $F(2n+1)\theta = F\theta \cdot v$ où u et v sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$; donc le second membre de l'équation précédente sera une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. En la désignant par $\chi\{\varphi\theta\}$ on aura:

$$\chi\{\varphi\theta\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi\theta - \psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta}$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ il viendra $\psi(\theta+\alpha) = \psi\theta$; $\psi(\omega-(\theta+\alpha)) = \psi(\omega-\theta)$

$$f(2n+1)(\theta+\alpha) = f((2n+1)\theta + 2m\omega + 2\mu\varpi i) = f(2n+1)\theta$$

$$F(2n+1)(\theta+\alpha) = F((2n+1)\theta + 2m\omega + 2\mu\varpi i) = F(2n+1)\theta$$

donc on aura $\chi\{\varphi(\theta+\alpha)\} = \chi\{\varphi\theta\}$. De la même manière on trouvera $\chi\{\varphi(\theta+\beta)\} = \chi\{\varphi\theta\}$. — On en deduit de même que plus haut pour la fonction $\psi_2\{\varphi\theta\}$ que $\chi\{\varphi\theta\}$ pourra être exprimée par une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc: $\chi\{\varphi\theta\} = q$ on aura

$$\psi_2\{\varphi\theta\} \cdot f\theta \cdot F\theta = q \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$$

Par consequent enfin

$$\psi\theta = p + q \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta \tag{14}$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$. — Pour trouver les degrés de ces fonctions, soit $(\varphi\theta)^\nu \cdot \chi\theta$ le terme dans $\psi\theta$ où $\varphi\theta$ est élevée à la plus haute puissance; on aura en posant $\varphi\theta$ infini

$\psi\theta = A \cdot (\varphi\theta)^\nu$ où A est une constante. On aura de même

$\psi(\omega-\theta) = A' \cdot (\varphi\theta)^\nu$ et par suite:

$$p = \frac{1}{2}(A + A') \cdot (\varphi\theta)^\nu$$

mais pour $\varphi\theta$ infini on a $\varphi(2n+1)\theta = B \cdot \varphi\theta$ où B est constante; d'où il suit que p sera du degré ν par rapport à $\varphi(2n+1)\theta$. On démontrera de la même manière que la fonction q sera du degré $\nu-2$ tout au plus. Notre théorème est donc démontré.—

Dans le cas où la quantité $\varphi\theta$ ne monte qu'à la première puissance dans $\psi\theta$ on a $\nu=1$, par conséquent q sera du degré -1, c'est-à-dire $q=0$. On a donc alors

$$15. \quad \psi\theta = A + B\,\varphi(2n+1)\theta$$

où A et B sont des quantités constantes, qu'on déterminera facilement en faisant $\theta=0$ et $\varphi\theta = \frac{1}{0}$.

Soit par ex: $\pi\theta$ le produit d'un nombre quelconque des racines de l'équation (1) et faisons

$$\psi\theta = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$$

il est clair qu'on aura $\psi(\theta) = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta)$ en remarquant que $\pi(\theta+(2n+1)\alpha+\mu\beta) = \pi(\theta+\mu\beta)$ et $\pi(\theta+(2n+1)\beta+m\alpha) = \pi(\theta+m\alpha)$ donc:

$$16 \quad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta+m\alpha+\mu\beta) = A + B\cdot\varphi(2n+1)\theta.$$

On doit remarquer que l'une ~~quan~~ des quantités A et B est toujours égale à zéro. ~~en effet en mettant θ au lieu de θ on aura:~~ On a ~~$\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta$~~

$A=0$ si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est un nombre impair et $B=0$ si ce nombre est pair. Dans ce dernier cas la quantité $\psi\theta$ est donc indépendante de la valeur de θ; et par conséquent en faisant $\theta=0$.

$$17 \quad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta+m\alpha+\mu\beta) = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(m\alpha+\mu\beta)$$

Ainsi si l'on fait $\pi\theta = \varphi\theta\cdot\varphi(\theta+k\alpha+k'\beta)$ on a:

$$18. \quad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta).\varphi(\theta+(m+k)\alpha+(\mu+k')\beta)$$

$$= \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha+\mu\beta).\varphi((m+k)\alpha+(\mu+k')\beta)$$

k et k' sont des nombres entiers quelconques moindres que $2n+1$. Cependant on ne peut pas supposer à la fois $k=0$; $k'=0$ car alors $\pi\theta = (\varphi\theta)^2$ et par suite $\nu=2$ tandis qu'on doit avoir $\nu=1$.

Entièrement de la même manière que nous avons démontré le théorème ~~suivant~~ précédent on pourra encore établir les deux suivants:

Théorème II. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $f(\theta+m\alpha+\mu\beta)$ telle que $\psi(\theta) = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta)$ on aura:

$$\psi\theta = p + q\cdot\varphi(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta$$

où p et q sont des fonctions entières de $f(2n+1)\theta$; la première du degré ν et la seconde de degré $\nu-2$ tout au plus, en designant par ν le plus grand exposant de $f\theta$ dans $\psi\theta$.

Théorème III. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $F(\theta+m\alpha+\mu\beta)$ telle que $\psi(\theta)=\psi(\theta+\alpha)=\psi(\theta+\beta)$ on aura

$$\psi\theta = p + q\cdot\varphi(2n+1)\theta\cdot f(2n+1)\theta$$

où p et q sont des fonctions entières de $F(2n+1)\theta$; la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$ tout au plus ; en designant par ν le plus grand exposant de $F\theta$ dans $\psi\theta$. —

§ 2.

A l'aide du theoreme I, demontré dans le § prec: il est facil de parvenir au théorème de M. Jacobi sur la forme des racines de l'équation:

$$\varphi(2n+1)\theta = R.$$

Considerons l'expression:

19. $$\psi\theta = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{mk+\mu k'}\cdot\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)$$

où $\delta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{2n+1}$ et k et k' deux nombres entiers.

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ on aura

$$\psi(\theta+\alpha) = \sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{\mu k'}\cdot\sum_0^{2n}{}_m\, \delta^{mk}\varphi(\theta+(m+1)\alpha+\mu\beta)$$

or on a $\sum_0^{2n}{}_m\, \delta^{mk}\varphi(\theta+(m+1)\alpha+\mu\beta) = \sum_1^{2n} \delta^{(m-1)k}\cdot\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta) + \delta^{2nk}\cdot\varphi(\theta+(2n+1)\alpha+\mu\beta)$

mais $\varphi(\theta+\mu\beta+(2n+1)\alpha) = \varphi(\theta+\mu\beta+2\omega) = \varphi(\theta+\mu\beta)$ donc en remarquant que $\delta^{2nk}=\delta^{-k}$:

$$\sum_0^{2n}{}_m\, \delta^{mk}\varphi(\theta+(m+1)\alpha+\mu\beta) = \delta^{-k}\cdot\sum_0^{2n}{}_m\, \varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)$$

L'expression de $\psi(\theta+\alpha)$ deviendra donc en substituant:

20 $$\psi(\theta+\alpha) = \delta^{-k}\cdot\psi\theta$$

Entierement de la même manière on aura:

21 $$\psi(\theta+\beta) = \delta^{-k'}\cdot\psi\theta$$

~~De l'équation~~ ~~on deduit en~~ ~~mettant successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha$, — au lieu de θ.~~

$$\cancel{\psi(\theta+\nu\alpha) = \delta^{-\nu k}\cdot\psi\theta}$$

~~De même on a~~

$$\cancel{\psi(\theta+\nu'\beta) = \delta^{-\nu'k'}\cdot\psi\theta}$$

~~donc en mettant dans $\theta+\nu'\beta$ au lieu de θ~~

$$\cancel{\psi(\theta+\nu\alpha+\nu'\beta) = \delta^{-\nu k-\nu'k'}\cdot\psi\theta}$$

~~où ν et ν' sont des nombres entiers quelconques.~~

~~Reprenons les formules~~ En élevant chaque membre (de 20) à la $(2n+1)^e$ puissance et remarquant que $\delta^{-k(2n+1)} = 1 = \delta^{-k'(2n+1)}$ il viendra :

$$\{\psi\theta\}^{2n+1} = \{\psi(\theta+\alpha)\}^{2n+1} = \{\psi(\theta+\beta)\}^{2n+1}$$

D'où il suit que le théorème 1er est applicable à la fonction $(\psi\theta)^{2n+1}$. On aura donc :

$$22. \quad (\psi\theta)^{2n+1} = p + q\cdot f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$. —

L'expression (19) de $\psi\theta$ nous montre que $\varphi\theta$ se trouve à la première puissance seulement dans cette fonction ; donc $\varphi\theta$ est élevé à la puissance $2n+1$ dans la fonction $(\psi\theta)^{2n+1}$. De là il suit que p et q seront respectivement du degré $2n+1$ et $2n-1$ tout au plus. Comme nous allons voir q n'est effectivement que du degré $2n-2$. —

En mettant dans l'expression de $(\psi\theta)^{2n+1}$ $\omega-\theta$ au lieu de θ on aura en remarquant que $\varphi(2n+1)(\omega-\theta) = \varphi(2n+1)\theta$,
$f(2n+1)(\omega-\theta) = -f(2n+1)\theta$, $F(2n+1)(\omega-\theta) = F(2n+1)\theta$
cette formule

$$\{\psi(\omega-\theta)\}^{2n+1} = p - q\cdot f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta.$$

donc :

$$23 \quad \begin{cases} 2p = (\psi\theta)^{2n+1} + \{\psi(\omega-\theta)\}^{2n+1} \\ 2q\cdot f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta = (\psi\theta)^{2n+1} - \{\psi(\omega-\theta)\}^{2n+1} \end{cases}$$

Mettons ici $-\theta$ au lieu de θ et désignons les valeurs correspondantes de p et q par p' et q' on aura comme il facil de déduire de la formule (19)

$$\psi(-\theta) = -\psi(\omega-\theta) \;,\; \psi(\omega+\theta) = -\psi\theta$$

donc

$$p' = -p \;,\; q' = q$$

Maintenant puisque $\varphi(2n+1)\theta$ change de signe avec θ il s'ensuit que p ne contiendra que des puissances impaires et q seulement des puissances paires. On aura donc

$$24. \quad \begin{cases} p = \left(a_0 + a_1\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 + a_2\{\varphi(2n+1)\theta\}^4 + \dots + a_n\{\varphi(2n+1)\theta\}^{2n}\right)\cdot\varphi(2n+1)\theta \\ q = b_0 + b_1\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 + b_2\{\varphi(2n+1)\theta\}^4 + \dots + b_{n-1}\{\varphi(2n+1)\theta\}^{2n-2} \end{cases}$$

où $a_0, a_1, \dots a_n$; $b_0, b_1, \dots b_{n-1}$ sont des coefficients indépendants de θ. Ces coefficients sont des fonctions des quantités $\varphi(m\alpha+\mu\beta)$ et on pourra les déterminer en développant les deux membres de l'équation (22) suivant les puissances de $\varphi\theta$. Or ce procédé serait fort compliqué. Nous donnerons tout-à-l'heure une autre méthode plus simple. —

Connaissant ainsi la valeur de $(\psi\theta)^{2n+1}$ en $\varphi(2n+1)\theta$ on en tire celle de $\psi\theta$ en extrayant la racine $(2n+1)^e$ savoir

25 $$\psi\theta = \sqrt[2n+1]{p + q\cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta}$$

$\psi\theta$ est une fonction linéaire des racines. Elle prend différentes formes selon les valeurs différentes de k et k'. En donnant à ces nombres toutes les valeurs depuis zero jusqu'à $2n$ on connait la valeur de $(2n+1)^2$ fonctions différentes. Nous allons voir qu'on pourra en déduire les racines elles-mêmes.

Désignons la valeur de $p + q\, f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$ qui répond à k et k' par $\chi(k,k')$ on aura :

26 $$\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{mk+\mu k'}\cdot\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta) = \sqrt[2n+1]{\chi(k,k')}$$

Multiplions cette équation par $\delta^{-m'k-\mu'k'}$ et prenons en suite la somme ~~depuis~~ par rapport à k et k' depuis zero jusqu'à $2n$ on aura :

$$\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'}\, \delta^{(m-m')k+(\mu-\mu')k'}\cdot\varphi(\theta+m\alpha+\mu\theta) = \sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'}\cdot \sqrt[2n+1]{\chi(k,k')}\times\delta^{-m'k-\mu'k'}$$

Maintenant on a :

$$\sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'}\, \delta^{(m-m')k+(\mu-\mu')k'} = \sum_0^{2n}{}_k\cdot \delta^{(m-m')k} \times \sum_0^{2n}{}_{k'}\cdot \delta^{(\mu-\mu')k'}$$

$$=\left\{1+\delta^{m-m'}+\delta^{2(m-m')}+\dots+\delta^{2n(m-m')}\right\}\times\left\{1+\delta^{\mu-\mu'}+\delta^{2(\mu-\mu')}+\dots+\delta^{2n(\mu-\mu')}\right\}$$

Quel que soit le nombre impair $2n+1$ premier ou non si en même temps m' et μ' sont positifs et moindres que $2n+1$ cette quantité se réduit à zero pour toutes les valeurs de ~~m et~~ m, m', μ, μ' ~~ex~~ excepté lorsqu'on a à la fois $m = m'$ et $\mu = m'$; dans ce cas elle devient $(2n+1)^2$. De là il suit que le premier membre de l'équation (26) ~~deviendra~~ se réduira à $(2n+1)^2\cdot\varphi(\theta+m'\alpha+\mu'\beta)$

Par conséquent on aura en changeant m' et μ' en m et μ

27. $$\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta) = \frac{1}{(2n+1)^2}\sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'}\, \delta^{-mk-\mu k'}\cdot\sqrt[2n+1]{\chi(k,k')}$$

Voici ~~Voilà~~ donc l'expression d'une racine quelconque de l'équation :

$$\varphi(2n+1)\theta - R = 0.$$

En faisant $m=0$ $\mu=0$ on aura la valeur de $\varphi\theta$ savoir

28. $$\varphi\theta = \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_0^{2n}{}_k \sum_0^{2n}{}_{k'}\sqrt[2n+1]{\chi(k,k')}$$

L'expression des racines contient comme on voit $(2n+1)^2$ radicaux différens. Or on peut les exprimer rationnellement en deux d'entre eux.

Soient ς et ς_1 les deux valeurs de $X(k,k')$ qui répondent respectivement à $k=1,\ k'=0$ et $k=0\ ;\ k'=0$ en sorte que:

29. $$\begin{cases} \varsigma = \left\{ \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^m \cdot \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) \right\}^{2n+1} \\ \varsigma_1 = \left\{ \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^\mu \cdot \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) \right\}^{2n+1} \end{cases}$$

alors je dis qu'on aura:

30. $$\psi\theta = S \cdot \varsigma^{-1+\frac{k}{2n+1}} \cdot \varsigma_1^{-1+\frac{k'}{2n+1}}$$

où S désigne une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$ et $f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$

Soient $\sqrt[2n+1]{\varsigma} = \psi_1\theta$, $\sqrt[2n+1]{\varsigma_1} = \psi_2\theta$ on aura en vertu des équations (20, 21) en faisant $k=1,\ k'=0\ ;\ k=0,\ k'=1$

$$\psi_1(\theta+\alpha) = \delta^{-1}\cdot\psi_1\theta\ ;\ \psi_2(\theta+\beta) = \delta^{-1}\cdot\psi_2\theta\ ;\ \psi_1(\theta+\beta) = \psi_1\theta\ ;\ \psi_2(\theta+\alpha) = \psi_2\theta$$

donc:

$$\{\psi_1(\theta+\alpha)\}^{-k+2n+1} = \delta^{+k}\cdot(\psi_1\theta)^{-k+2n+1}$$

$$\{\psi_2(\theta+\beta)\}^{-k'+2n+1} = \delta^{+k'}\cdot(\psi_2\theta)^{-k+2n+1}$$

et de là en ayant égard à la formule 20

$$\psi(\theta+\alpha)\cdot\{\psi_1(\theta+\alpha)\}^{2n+1-k}\cdot\{\psi_2(\theta+\alpha)\}^{2n+1-k'} = \psi\theta\cdot(\psi_1\theta)^{2n+1-k}\cdot(\psi_2\theta)^{2n+1-k'}$$

$$\psi(\theta+\beta)\cdot\{\psi_1(\theta+\beta)\}^{2n+1-k}\cdot\{\psi_2(\theta+\beta)\}^{2n+1-k'} = \psi\theta\cdot(\psi_1\theta)^{2n+1-k}\cdot(\psi_2\theta)^{2n+1-k'}$$

D'où il suit en vertu du théorème premier qu'on peut faire:

$$\psi\theta\cdot(\psi_1\theta)^{2n+1-k}\cdot(\psi_2\theta)^{2n+1-k'} = u + v\cdot f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta = S$$

où u et v sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$.

et par suite

31. $$\psi\theta = \frac{(u + v\cdot f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta)\cdot \varsigma^{\frac{k}{2n+1}}\cdot\varsigma_1^{\frac{k'}{2n+1}}}{\varsigma\cdot\varsigma_1} = \sqrt[2n+1]{X(k,k')}$$

En vertu de cette formule le second membre de l'équation (27) deviendra une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$; $f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta$, $\sqrt[2n+1]{\varsigma}$ et $\sqrt[2n+1]{\varsigma_1}$ et cette fonction satisfait à l'équation (1) en donnant aux radicaux $\sqrt[2n+1]{\varsigma}$ et $\sqrt[2n+1]{\varsigma_1}$ toutes leurs valeurs. —

Revenons maintenant à la détermination des fonctions p et q dans la formule 22

Faisons $\theta = \frac{\varepsilon}{2n+1}$, nous aurons:

$$\left\{\psi\left(\tfrac{\varepsilon}{2n+1}\right)\right\}^{2n+1} = a_0\varphi\varepsilon + a_1(\varphi\varepsilon)^3 + \dots + a_n(\varphi\varepsilon)^{2n+1} + \left\{b_0 + b_1(\varphi\varepsilon)^2 + \dots + b_{n-1}(\varphi\varepsilon)^{2n-2}\right\}. f\varepsilon . F\varepsilon \quad \dots 32$$

Cela posé supposons qu'on donne à ε une telle valeur que $\psi\left(\frac{\varepsilon}{2n+1}\right) = 0$ on aura l'équation:

$$33 \dots \quad 0 = a_0\varphi\varepsilon + a_1(\varphi\varepsilon)^3 + \dots + a_n(\varphi\varepsilon)^{2n+1} + \left\{b_0 + b_1(\varphi\varepsilon)^2 + \dots + b_{n-1}(\varphi\varepsilon)^{2n-2}\right\}. f\varepsilon . F\varepsilon$$

que nous représenterons par $v = 0$.

Maintenant il est clair d'après la forme du premier membre de l'équation 32 que l'équation $v = 0$ aura encore lieu en la différentiant par rapport à ε un nombre quelconque de fois moindre que $2n+1$. On obtiendra de cette manière ces $2n+1$ équations:

$$35 \quad v = 0, \quad \frac{dv}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{d^2v}{d\varepsilon^2} = 0, \quad \dots \quad \frac{d^{2n}v}{d\varepsilon^{2n}} = 0$$

qui sont toutes linéaires par rapport aux inconnues $a_0, a_1, \dots a_n$, $b_0, b_1, \dots b_{n-1}$. En supposant ε connu ces équations donneront les coefficiens précédents en l'un d'entre eux; il faut donc encore une équation. Or si l'on divise les deux membres de l'équation par $(\varphi\theta)^{2n+1}$ et qu'on suppose ensuite $\varphi\theta = \frac{1}{0}$ le premier membre se réduit à 1 et le second à $a_n \times \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}}$ à cause de la formule $\frac{\varphi(2n+1)\theta}{\varphi\theta} = \frac{1}{2n+1}$ pour $\varphi\theta = \frac{1}{0}$. on aura donc:

$$36 \dots \quad a_n = (2n+1)^{2n+1}$$

Les mêmes équations (35) donneront encore une équation en $\varphi\varepsilon$ seule mais ~~pour~~ comme elle doit avoir lieu quelle que soit la valeur de k et k_1, il sera impossible d'en tirer la valeur de $\varphi\varepsilon$ qui doit avoir effectivement lieu. Or on peut trouver cette quantité de la manière suivante:

Soit

$$37 \dots \quad \pi\theta = \psi\theta . \psi(-\theta)$$

on aura

$$\pi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\alpha) . \psi(-\theta-\alpha)$$

mais selon (20) on a $\psi(\theta+\alpha) = \delta^{-k} . \psi\theta$ et de là en mettant $-\theta-\alpha$ au lieu de θ $\psi(-\theta-\alpha) = \delta^{k} . \psi(-\theta)$ donc en substituant $\pi(\theta+\alpha) = \pi\theta$. De la même manière on trouvera que $\pi(\theta+\beta) = \pi\theta$. donc en vertu du 1er théorème

$$\psi\theta . \psi(-\theta) = A + B . \varphi(2n+1)\theta + C . \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 + D . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta$$

Si l'on met $\omega - \theta$ au lieu de θ le premier membre reste le même et le second reste aussi le même en changeant seulement le signe de D. ~~La~~ Le coefficient est donc égal à zero. En remarquant de plus que le second membre doit rester invariable en changeant le signe de θ ou celui de $\varphi(2n+1)\theta$ on aura encore $B = 0$.

$\mathfrak{X}$. et par conséquent
$$\psi\theta\cdot\psi(-\theta) = A + \mathfrak{C}\cdot\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 .$$
en faisant $\theta = 0$ on aura $A = \{\psi(0)\}^2$; en faisant $\varphi\theta = \frac{1}{0}$ on aura $\mathfrak{C} = -(2n+1)^2$ et en faisant $\theta = \frac{\varepsilon}{2n+1}$, $\psi\theta = 0$ et $A + \mathfrak{C}\cdot(\varphi\varepsilon)^2$

on aura donc :
$$\left.\begin{aligned} \psi\theta\cdot\psi(-\theta) &= (2n+1)^2\{(\varphi\varepsilon)^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\} \\ \text{et} \quad \varphi\varepsilon &= \pm\frac{1}{2n+1}\cdot\sum_0^{2n}{}_m\sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{mk+\mu k'}\cdot\varphi(m\alpha+\mu\beta) \end{aligned}\right\} \ldots (38)$$

On connait donc $\varphi\varepsilon$ au signe près, or ce-ci n'influe en rien sur la valeur des coefficiens $a_0, a_1, \ldots$ $b_0, b_1, \ldots$ En effet il n'est pas difficil de voir qu'on peut les exprimer rationnellement en $(\varphi\varepsilon)^2$.

Le coefficient b_0 se trouve immediatement en faisant $\varepsilon = 0$ savoir
$$39 \ldots \quad b_0 = \left\{\sum_0^{2n}{}_m\sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{mk+\mu k'}\cdot\varphi(m\alpha+\mu\beta)\right\}^{2n+1} = \pm(2n+1)^{2n+1}\cdot(\varphi\varepsilon)^{2n+1}$$

Les fonctions p et q jouissent d'une propriété remarquable qu'on peut deduire sur le champ de l'équation (38) ... En effet en élévant les deux membres à la $(2n+1)^e$ puissance on aura
$$\{\psi\theta\}^{2n+1}\cdot\{\psi(-\theta)\}^{2n+1} = (2n+1)^{4n+2}\{(\varphi\varepsilon)^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\}$$
mais $\{\psi\theta\}^{2n+1} = p + q\cdot f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta$, $\{\psi(-\theta)\}^{2n+1} = -p + q\cdot f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta$

donc en substituant
$$p^2 - q^2\cdot\{f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta\}^2 = (2n+1)^{4n+2}\{\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - (\varphi\varepsilon)^2\}^{2n+1}$$
Soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ on aura $\{f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta\}^2 = (1-c^2y^2)(1+e^2y^2)$ donc

$$(40)\ldots(a_0y + a_1y^3 + \ldots + a_ny^{2n+1})^2 - (b_0 + b_1y^2 + \ldots + b_{n-1}y^{2n-2})^2(1-c^2y^2)(1+e^2y^2) = (2n+1)^{4n+2}\cdot\{y^2 - \varphi^2\varepsilon\}^{2n+1}$$

Cette propriété des fonction p et q suffit pour les determiner au signe près car l'equation doit avoir lieu pour une valeur quelconque de y, et donnera ainsi $2n+2$ équation entre les coefficiens $a_0, a_1, \ldots$ $b_0, b_1, \ldots$ et $(\varphi\varepsilon)^2$.

Pour donner un exemple considerons le cas le plus simple où $n = 1$. Dans ce cas on a $\alpha = \frac{2\omega}{3}$, $\beta = \frac{2\varpi i}{3}$
$$\mathfrak{X}\cdot \quad \psi\theta = \sum_0^2{}_m\sum_0^2{}_\mu\, \delta^{mk+\mu k'}\cdot\varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{3}\right)$$
ou bien
$$\begin{aligned} 41\ldots\quad \psi\theta = {} & \varphi\theta + \delta^k\cdot\varphi\left(\theta+\tfrac{2\omega}{3}\right) + \delta^{2k}\varphi\left(\theta+\tfrac{4\omega}{3}\right) \\ & + \delta^{k'}\cdot\varphi\left(\theta+\tfrac{2\varpi i}{3}\right) + \delta^{k+k'}\varphi\left(\theta+\tfrac{2\omega+2\varpi i}{3}\right) + \delta^{2k+k'}\varphi\left(\theta+\tfrac{2\omega+4\varpi i}{3}\right) \\ & + \delta^{2k'}\varphi\left(\theta+\tfrac{4\varpi i}{3}\right) + \delta^{k+2k'}\varphi\left(\theta+\tfrac{2\omega+4\varpi i}{3}\right) + \delta^{2k+2k'}\varphi\left(\theta+\tfrac{4\omega+4\varpi i}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\{\psi\theta\}^3 = a_0\,\varphi 3\theta + a_1(\varphi 3\theta)^3 + b_0 \cdot f3\theta \cdot F3\theta$$

$$(a_0 y + a_1 y^3)^2 - b_0^2(1 - c^2y^2)(1 + e^2y^2) = 3^6 \cdot (y^2 - f^2)^3 \quad \ldots (41')$$

où

$$42 \ldots \quad f = \tfrac{1}{3} \cdot \sum_0^2{}_m \sum_0^2{}_\mu\, \delta^{mk + \mu k'}\, \varphi\left(\frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{3}\right)$$

En égalant les coefficiens de y^4 dans les deux membres il viendra:

$$2a_0 a_1 + b_0^2 c^2 e^2 = -3^7 f^2$$

maintenant

$$a_1 = 3^3 \quad ; \quad b_0 = 3^3 \cdot f^3$$

donc

$$a_0 = -\tfrac{1}{2}\{3f^2 + e^2c^2f^6\} \cdot 3^3$$

on a par suite

$$\{\psi\theta\}^3 = 3^3 \cdot \left\{(\varphi 3\theta)^3 - \tfrac{1}{2}(3f^2 + e^2c^2f^6) \cdot \varphi 3\theta + f^3 \cdot f3\theta \cdot F(3\theta)\right\} = \chi(k, k')$$

et de là

$$43 \ldots \quad \psi\theta = 3 \cdot \sqrt[3]{(\varphi 3\theta)^3 - \tfrac{1}{2}(3f^2 + e^2c^2f^6)\,\varphi 3\theta + f^3 \cdot f3\theta \cdot F3\theta}$$

La quantité f est donné par l'équation 42. Si l'on la cherche à l'aide de l'équation (41') on parviendra à une équation du huitième degré. En effet en comparant les coefficiens de y^2 on aura

$$a_0^2 + b_0^2(c^2 - e^2) = 3^7 \cdot f^4$$

c'est-à-dire en substituant les valeurs de a_0 et b_0

$$\tfrac{1}{4} \cdot 3^6 \cdot (3f^2 + e^2c^2f^6)^2 + 3^6(c^2 - e^2) \cdot f^6 - 3^7 \cdot f^4 = 0$$

ou bien en developpant:

$$44 \ldots \quad f^8 + 6e^2c^2f^4 + 4(c^2 - e^2) \cdot f^2 - 3 = 0.$$

Les huit racines de cette équation sont les huit valeurs de f qu'on obtiendra en donnant à k et k' les valeurs ~~1, 1, 2, 0 et 2~~ 0, 1, 2 en faisant abstraction de la ~~racine~~ valeur $f = 0$ qui repond à $k = 0$ et $k' = 0$. —

Rien n'a été plus facil que de determiner la valeur de $\psi\theta$ dans le cas où $n = 1$; mais si n est plus grand il est très compliqués de se servir de la methode exposée; ~~c'est à dire~~ c'est pourquoi nous allons exposer une autre qui conduira à l'expression générale et explicite de la fonction $\psi\theta$.

Designons par $\pi(k)$ et $\pi_1(k')$ les valeurs de la fonction $\psi\theta$, qui repondent respectivement à $k' = 0$ et $k = 0$ nous aurons:

12)

45 ... $\pi(k) = \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n} \delta^{mk} \cdot \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$; $\pi_1(k) = \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \delta^{\mu k} \cdot \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$

Soient de même $\pi'(k)$ et $\pi'_1(k)$ les valeurs de $\pi(k)$ et $\pi_1(k)$ en mettant $-\theta$ au lieu de θ.

Cela posé considérons la fonction

46 .... $\mathfrak{P} = \pi(k) \cdot \pi_1(k') \cdot \psi(-\theta)$

En y mettant $\theta + \alpha$ au lieu de θ les fonctions

$$\pi(k) \; ; \; \pi_1(k') \; ; \; \psi(-\theta)$$

deviendront respectivement

$$\delta^{-k} \cdot \pi(k) \; ; \; \pi_1(k') \; ; \; \delta^{k} \cdot \psi(-\theta)$$

donc la fonction $\mathfrak{P}$ reste la même. En y mettant $\theta + \beta$ au lieu de θ la fonction $\mathfrak{P}$ reste encore invariable donc en vertu du 1er theoreme on aura

47 .... $\pi(k) \cdot \pi_1(k') \cdot \psi(-\theta) = u + u' \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$

où u et u' sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$; la 1ère du degré 3 et la seconde du degré 1. En mettant $\omega - \theta$ au lieu de θ les trois fonctions $\pi(k) \; ; \; \pi_1(k') \; ; \; \psi(-\theta)$ se changeront en $-\pi'(k) \; ; \; -\pi'(k') \; ; \; -\psi\theta$ donc

47' .... $\pi'(k) \cdot \pi'_1(k') \cdot \psi\theta = -u + u' \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$

par suite :

$$2u = \pi(k) \cdot \pi_1(k') \cdot \psi(-\theta) - \pi'(k) \cdot \pi'_1(k') \cdot \psi\theta$$

$$2u' \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta = \pi(k) \cdot \pi_1(k') \cdot \psi(-\theta) + \pi'(k) \cdot \pi'_1(k') \cdot \psi\theta$$

en changeant ici θ en $\omega - \theta$ on voit que u change de signe et que u' reste invariable on aura donc

$$u = a_0 \, \varphi(2n+1)\theta + a_1 (\varphi(2n+1)\theta)^3 \; ; \; u' = b$$

où a_0, a_1, b sont des quantités constantes par rapport à θ.

Il viendra donc :

48 .... $\pi(k) \cdot \pi_1(k') \cdot \psi(-\theta) = a_0 \, \varphi(2n+1)\theta + a_1 \{\varphi(2n+1)\theta\}^3 + b \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$

Soit

49 .... $c_{k,k'} = \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \delta^{mk + \mu k'} \cdot \varphi(m\alpha + \mu\beta)$

on aura en vertu de la formule (38)

50 ..... $\psi\theta \cdot \psi(-\theta) = (2n+1)^2 \{ c^2_{k,k'} - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 \}$

l'équation (48) .. donnera donc en multipliant par $\psi\theta$.

$$\cancel{\psi\theta = \pi(k) \cdot \pi_1(k) \cdot \frac{a_0 \, \varphi(2n+1)\theta + a_1 \{\varphi(2n+1)\theta\}^3 + b \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta}{(2n+1)^2 \{ c_{k,k'} - \varphi(2n+1)}}$$

$$\psi\theta = \frac{(2n+1)^2\left\{c_{k,k'}^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\right\}}{a_0\,\varphi(2n+1)\theta + a_1\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 + b\cdot f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta}\cdot \pi(k)\cdot\pi_1(k') \quad \ldots\ 51$$

Cette formule donne la fonction $\psi\theta$ à l'aide du produit des deux fonctions $\pi(k)$; $\pi(k')$ si l'on connait seulement les trois constantes a_0, a_1, b. Or ces quantités se trouvent aisément comme il suit.

Faisons d'abord dans (48) $\varphi\theta = \frac{1}{0}$ après avoir divisé par $(\varphi\theta)^3$ on obtiendra, $a_1 = -(2n+1)^3$. Soit ensuite $\theta = 0$ on aura en faisant pour abréger

$$52\ldots\left\{\begin{array}{l} c_k = \frac{1}{2n+1}\cdot\sum_0^{2n}{}_m\sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{mk}\cdot\varphi(m\alpha+\mu\beta) \\ e_k = \frac{1}{2n+1}\cdot\sum_0^{2n}{}_m\sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{\mu k}\varphi(m\alpha+\mu\beta)\end{array}\right.$$

$\pi(k) = c_k$; $\pi_1(k') = e_{k'}$; $\psi(-\theta) = c_{k,k'}$; $\varphi(2n+1)\theta = 0$; $f(2n+1)\theta.\ F(2n+1)\theta = 1$

donc : $b = (2n+1)^3\cdot c_k\cdot e_{k'}\cdot c_{k,k'}$.

Il reste à trouver le coefficient a_0. Or en multipliant membre à membre les deux équations (47, 47') on aura

$$\pi(k)\cdot\pi'(k)\cdot\pi_1(k')\cdot\pi_1'(k')\cdot\psi\theta\cdot\psi(-\theta) = -u^2 + a^2\cdot\left\{f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta\right\}^2$$

maintenant en vertu de la formule (50) on a

$$\pi(k)\cdot\pi'(k) = (2n+1)^2\left\{c_k^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\right\}$$

$$\pi_1(k')\cdot\pi_1'(k') = (2n+1)^2\left\{e_{k'}^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\right\}$$

donc en faisant $\varphi(2n+1)\theta = y$

$$(a_0 y + a_1 y^3)^2 - b^2\cdot(1-c^2y^2)(1+e^2y^2) = (2n+1)^6\{y^2-c_k^2\}\{y^2-e_{k'}^2\}\{y^2-c_{k,k'}^2\}$$

et comparant de part et d'autre les coefficients de y^4 on obtiendra :

$$2a_0a_1 + b^2e^2c^2 = -(2n+1)^6\{c_k^2+e_{k'}^2+c_{k,k'}^2\}$$

donc en remettant les valeurs de a_0 et b_0

$$a_0 = \frac{1}{2}\cdot(2n+1)^3\cdot\left\{c_k^2+e_{k'}^2+c_{k,k'}^2+e^2c^2\,c_k^2\cdot e_{k'}^2\cdot c_{k,k'}^2\right\}$$

En substituant les valeurs de a_0, a_1, b l'expression (51) de $\psi\theta$ deviendra :

$$\psi\theta = \frac{1}{2n+1}\cdot\pi(k)\cdot\pi_1(k')\cdot\frac{\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - c_{k,k'}^2}{\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - \frac{1}{2}\{c_k^2+e_{k'}^2+c_{k,k'}^2+e^2c^2\cdot c_k^2\cdot e_{k'}^2\cdot c_{k,k'}^2\}\cdot\varphi(2n+1)\theta - c_k\cdot e_{k'}\cdot c_{k,k'}\cdot f(2n+1)\theta\cdot F(2n+1)\theta} \quad\ldots 53$$

Il s'agit maintenant de trouver les fonctions $\pi(k)$ et $\pi_1(k')$.
En désignant par k et k_1 deux nombres entiers quelconques il est clair que les deux fonctions : $\pi(k)\cdot\pi(k_1)\cdot\pi'(k+k_1)$ et $\pi_1(k)\cdot\pi_1(k_1)\cdot\pi_1'(k+k_1)$ ne changeront

pas de valeur en mettant $\theta+\alpha$ et $\theta+\beta$ au lieu de θ. Ces fonctions auront donc en vertu du 1er theoreme la forme $u + u'\, f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$ où u et u' sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$. On demontrera aisément que u' sera constant et u de la forme $a_0\, \varphi(2n+1)\theta + a_1 \{\varphi(2n+1)\theta\}^3$.

Soient donc :

$$54 \ldots \begin{cases} \pi(k) \cdot \pi(k') \cdot \pi'(k+k') = a_0\, \varphi(2n+1)\theta + a_1\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 + b \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta \\ \pi_1(k) \cdot \pi_1(k') \cdot \pi_1'(k+k') = a_0'\, \varphi(2n+1)\theta + a_1'\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 + b' \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta \end{cases}$$

En traitant ces equations entierement de la même maniere que l'équation 48 on trouvera :

$$55 \ldots \begin{cases} a_1 = -(2n+1)^3\,; \quad b = c_k \cdot c_{k'} \cdot c_{k+k'}\,; \quad a_0 = \tfrac{1}{2}(2n+1)^3\{c_k^2 + c_{k'}^2 + c_{k+k'}^2 + e^2c^2\, c_k^2 \cdot c_{k'}^2 \cdot c_{k+k'}^2\} \\ a_1' = -(2n+1)^3\,; \quad b' = (2n+1)^3 \cdot e_k \cdot e_{k'} \cdot e_{k+k'}\,; \quad a_0' = \tfrac{1}{2}(2n+1)^3\{e_k^2 + e_{k'}^2 + e_{k+k'}^2 + e^2c^2\, e_k^2 \cdot e_{k'}^2 \cdot e_{k+k'}^2\} \end{cases}$$

~~En faisant donc~~. Cela posé on obtiendra en multipliant les équations ~~$A_{k,k'} = a_0$~~ respectivement par $\pi(k+k')$ et $\pi_1(k+k')$ et remarquant que

$$\pi(k+k') \cdot \pi'(k+k') = (2n+1)^2\{c_{k+k'}^2 - \varphi^2(n+1)\theta\}$$

$$\pi_1(k+k') \cdot \pi_1'(k+k') = (2n+1)^2\{e_{k+k'}^2 - \varphi^2(n+1)\theta\}$$

$$56 \begin{cases} \pi'(k+k') = \dfrac{1}{2n+1} \cdot \pi(k) \cdot \pi(k') \cdot \dfrac{\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - c_{k+k'}^2}{\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - \frac{1}{2}(c_k^2 + c_{k'}^2 + c_{k+k'}^2 + e^2c^2\, c_k^2 \cdot c_{k'}^2 \cdot c_{k+k'}^2)\varphi(2n+1)\theta - c_k \cdot c_{k'} \cdot c_{k+k'} \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta} \\ \pi_1(k+k') = \dfrac{1}{2n+1} \cdot \pi_1(k) \cdot \pi_1(k') \cdot \dfrac{\{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - e_{k+k'}^2}{\{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - \frac{1}{2}(e_k^2 + e_{k'}^2 + e_{k+k'}^2 + e^2c^2\, e_k^2 \cdot e_{k'}^2 \cdot e_{k+k'}^2)\varphi(2n+1)\theta - e_k \cdot e_{k'} \cdot e_{k+k'} \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta} \end{cases}$$

Ces formules donnent $\pi(k+k')$ en $\pi(k)$ et $\pi(k')$ et $\pi_1(k+k')$ en $\pi_1(k)$ et $\pi_1(k')$. Il est facil d'en tirer la valeur de $\pi(k)$ et $\pi_1(k)$. — Soit $k'=1$ et mettons $k-1$ au lieu de k nous aurons

$$57 \ldots \begin{cases} \pi(k) = \dfrac{1}{2n+1} \cdot \pi(1) \cdot \pi(k-1) \cdot \dfrac{v_k}{t_k}. \\ \pi_1(k) = \dfrac{1}{2n+1} \cdot \pi_1(1) \cdot \pi_1(k-1) \cdot \dfrac{v_k'}{t_k'} \end{cases}$$

où l'on a fait pour abreger

$$58 \quad v_k = \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - c_k^2\,; \quad v_k' = \{\varphi(2n+1)\theta\}^2 - e_k^2$$

$$59 \ldots \begin{cases} t_k' = \{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - \frac{1}{2}(e_1^2 + e_{k-1}^2 + e_k^2 + e^2c^2\, e_1^2 e_{k-1}^2\, e_k^2) \cdot \varphi(2n+1)\theta - e_1 \cdot e_{k-1} \cdot e_k \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta \\ t_k = \{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_{k-1}^2 + c_k^2 + e^2c^2\, c_1^2 \cdot c_{k-1}^2 \cdot c_k^2) \cdot \varphi(2n+1)\theta - c_1 \cdot c_{k-1} \cdot c_k \cdot f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta \end{cases}$$

Cela posé les équations (57) donneront sur le champ en faisant $k = 2, 3, \ldots$ et eliminant ensuite :

$$\left.\begin{aligned}\pi(k) &= \frac{1}{(2n+1)^{k-1}}\cdot\{\pi(1)\}^k\cdot\frac{v_2\cdot v_3\cdots\cdots v_k}{t_2\cdot t_3\cdots\cdots t_k}\\ \pi_1(k) &= \frac{1}{(2n+1)^{k-1}}\cdot\{\pi_1(1)\}^k\cdot\frac{v'_2\cdot v'_3\cdots\cdots v'_k}{t'_2\cdot t'_3\cdots\cdots t'_k}\end{aligned}\right\}\ldots 60$$

de cette manière il restent seulement les deux fonctions $\pi(1)$ et $\pi_1(1)$, qui sont encore inconnues. Or si l'on fait $k = 2n+1$ on a $c_k = c_k = 0$

$\pi(2n+1) = \cancel{\frac{1}{2n}}\ \pi(0) = (2n+1)^2\cdot\varphi(2n+1)\theta = \pi_1(2n+1)$; $v_{2n+1} = \{\varphi(2n+1)\theta\}^2$

$t_{2n+1} = \{\varphi(2n+1)\theta\}^3 - c_{2n}^2 = v_{2n}$; $t'_{2n+1} = v'_{2n}$ donc en substituant

$$\{\pi(1)\}^{2n+1} = (2n+1)^{2n+1}\cdot\frac{t_1\cdot t_2\cdots\cdots t_{2n}}{v_1\cdot v_2\cdots\cdots v_{2n-1}}$$

$$\{\pi_1(1)\}^{2n+1} = (2n+1)^{2n+1}\cdot\frac{t'_1\cdot t'_2\cdots\cdots t'_{2n}}{v'_1\cdot v'_2\cdots\cdots v'_{2n-1}}$$

et de là

$$\left.\begin{aligned}\pi(1) &= (2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{\frac{t_1\cdot t_2\cdots\cdots t_{2n}}{v_1\cdot v_2\cdots\cdots v_{2n-1}}}\\ \pi_1(1) &= (2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{\frac{t'_1\cdot t'_2\cdots\cdots t'_{2n}}{v'_1\cdot v'_2\cdots\cdots v'_{2n-1}}}\end{aligned}\right\}\ldots 61$$

Connaissant ainsi $\pi(1)$ et $\pi_1(1)$ on aura $\pi(k)$ et $\pi(k)$ par les équations (60) et ensuite $\varphi\theta$ par l'equation (53).

On peut simplifier un ~~peut~~ peu les expressions de $\pi(1)$ et $\pi_1(1)$ en remarquant que $t_{2n} = t_1$, $t_{2n-1} = t_2$, ... $v_{2n-1} = v_1$, $v_{2n-2} = v_2$ .... etc. On obtiendra ainsi

$$\left.\begin{aligned}\pi(1) &= (2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{\left(\frac{t_1\cdot t_2\cdots t_n}{v_1\cdot v_2\cdots v_n}\right)^2\cdot t_{n+1}}\\ \pi_1(1) &= (2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{\left(\frac{t'_1\cdot t'_2\cdots t'_n}{v'_1\cdot v'_2\cdots v'_n}\right)^2\cdot t'_{n+1}}\end{aligned}\right\}\ldots 62$$

Les quantités sous les radicaux sont representées sous une forme ~~rat~~ fractionnaire mais selon ce qui précède elles sont reellement des fonctions entières. On pourra trouver ces fonctions par un procedé particulier que nous allons exposer :

Multiplions l'expression de $\pi(k)$ par $\pi'(k)$ nous obtiendrons en remarquant que $\pi(k)\cdot\pi'(k) = (2n+1)^2\left\{c_k^2 - \{\varphi(2n+1)\theta\}^2\right\} = -(2n+1)^2 v_k$

$$63\ldots\ \pi'(k)\{\pi(1)\}^k = -(2n+1)^{k+1}\cdot\frac{t_1\cdot t_2\cdots\cdots t_k}{v_1\cdot v_2\cdots v_{k-1}}$$

Cela posé soit

$$64\ldots\ \frac{t_1\cdot t_2\cdots\cdots t_k}{v_1\cdot v_2\cdots v_{k-1}} = S_k$$

16)

nous aurons :

$$v_k \cdot \delta_{k+1} = t_{k+1} \cdot \delta_k \quad ; \quad v_{k-1} \cdot \delta_k = t_k \cdot \delta_{k-1}$$

et

$$\cancel{v_{k+1} \cdot \delta_{k+2} = t_{k+2} \cdot \delta_{k+1}}$$

de là on tire en multipliant la 1ère équation par c_{k-1} et la seconde par $-c_{k+1} \cdot \frac{\theta_k}{v_{k-1}}$ et en suite ajoutant :

$$65 \ldots 0 = c_{k-1} \cdot v_k \cdot \delta_{k+1} - (c_{k-1} t_{k+1} + c_{k+1} \cdot \theta_k) \cdot \delta_k + c_{k+1} \cdot \frac{t_k \cdot \theta_k}{v_{k-1}} \cdot \delta_{k-1}$$

Cela posé si l'on désigne par θ_k la valeur de t_k en y changeant le signe de $f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$; les coefficiens de δ_k et δ_{k-1} seront divisible par v_k. En effet on a d'abord

$$t_k \cdot \theta_k = \{\varphi^2(2n+1)\theta - c_1^2\}\{\varphi^2(2n+1)\theta - c_k^2\}\{\varphi^2(2n+1)\theta - c_{k-1}^2\}$$

c'est-à-dire $t_k \cdot \theta_k = v_1 \cdot v_k \cdot v_{k-1}$

on trouve encore à l'aide de la formule (59)

$$c_{k-1} t_{k+1} + c_{k+1} \cdot \theta_k = (c_{k-1} + c_{k+1}) \cdot \varphi(2n+1)\theta \cdot \{\varphi^2(2n+1)\theta - c_k^2\}$$

$$= (c_{k-1} + c_{k+1}) \cdot \varphi(2n+1)\theta \cdot v_k$$

On aura donc en substituant dans l'équation (65) et divisant ensuite par v_k

$$66 \ldots c_{k-1} \cdot \delta_{k+1} - (c_{k-1} + c_{k+1}) \cdot \varphi(2n+1)\theta \cdot \delta_k + c_{k+1} \cdot \{\varphi^2(2n+1)\theta - c_1^2\} \cdot \delta_{k-1} = 0$$

Cette formule donne une loi très simple pour former successivement les fonctions δ_k ~~D'abord en faisant k~~ en connaissant les deux δ_1 et δ_2. Or on $\delta_1 = -\frac{\pi'(1) \cdot \pi(1)}{(2n+1)^2}$ = ~~[illegible]~~ $v_1 = \varphi^2(2n+1)\theta - c_1^2$

et $\delta_2 = t_2$. Par là on voit donc les quantités $\delta_3, \delta_4 \ldots \delta_k$, déterminées par la formule (66) en faisant $k = 2, 3, \ldots$ seront des fonctions entières. En faisant $k = 2n$ on aura la valeur de $\delta_{2n+1} = \frac{t_2 t_3 \ldots t_{2n}}{v_2 \cdot v_3 \ldots v_{2n-1}}$ et

$$67 \ldots \pi(1) = (2n+1) \cdot \sqrt[2n+1]{\delta_{2n}}$$

On aura au même temps en vertu de la formule (60)

$$68 \ldots \pi(k) = \frac{1}{(2n+1)^{k-1}} \cdot \{\pi(1)\}^k \cdot \frac{v_k}{\delta_k}$$

En faisant $69 \ldots \delta'_k = \frac{t'_1 \cdot t'_2 \ldots t'_k}{v'_1 \cdot v'_2 \ldots v'_{k-1}}$ on aura entièrement de là même

70. $\delta_{k+1}\cdot\delta'_{k+1} - (e_{k-1}+e_{k+1})\,\varphi^2(2n+1)\theta\cdot\delta'_k + e_{k+1}\{\varphi^2(2n+1)\theta - e_1^2\}\cdot\delta'_{k-1} = 0$

§ 3.

Theoreme IV.

Soient $a_0, a_1, a_2 \ldots\ b_0, b_1, b_2 \ldots$ des quantités en nombre quelconque et dont l'une au moins soit variable. Si l'on désigne les racines de l'équation

$$71 \ldots\ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m)^2 - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)^2 (1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = 0$$

par

$$\varphi\theta_1,\ \varphi\theta_2,\ \varphi\theta_3, \ldots\ \varphi\theta_\mu$$

je dis qu'on aura:

$$72 \ldots\ \varphi(\pm\theta_1 \pm\theta_2 \pm\theta_3 \pm \ldots \pm\theta_\mu) = \text{à une constante}$$

en determinant convenablement le signe des quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\mu$

Demonstration. Soient pour abreger

$$73.\ \begin{cases} p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \\ q = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n \end{cases}$$

et faisons:

$$74 \ldots\ \psi(x) = p^2 - q^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)$$

en mettant pour x l'une quelconque des quantités $\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \ldots$ on aura

$$75\quad \psi(\varphi\theta) = p^2 - q^2(1 - c^2\varphi^2\theta)\cdot(1 + e^2\varphi^2\theta) = 0 = p^2 - q^2(f\theta)^2\cdot(F\theta)^2$$

en différentiant cette equation par rapport à θ et $a_0, a_1, \ldots b_0, b_1, \ldots$ il viendra

$$76\quad \psi'(\varphi\theta)\cdot f\theta\cdot F\theta\cdot d\theta + 2p\,\delta p - 2q\,\delta q\,(f\theta)^2\cdot(F\theta)^2 = 0$$

où le signe de différentiation δ se rapporte aux seules quantités $a_0, a_1, \ldots b_0 \ldots$

Maintenant la même equation (75) donne

$$77\quad p = \varepsilon\, q\, f\theta\cdot F\theta \quad \text{où}\quad \varepsilon = \pm 1$$

En vertu de cette equation on aura

$$2p\,\delta p - 2q\,\delta q\,(f\theta)^2(F\theta)^2 = 2\varepsilon\, f\theta\cdot F\theta\,\{q\,\delta p - p\,\delta q\}$$

L'equation (76) deviendra donc en substituant et divisant par $f\theta\cdot F\theta$

$$\psi'(\varphi\theta)\cdot d\theta + 2\varepsilon(q\,\delta p - p\,\delta q) = 0$$

d'où l'on tire

$$78 \ldots\ \varepsilon\, d\theta = \frac{2(p\,\delta q - q\,\delta p)}{\psi'(\varphi\theta)}$$

La quantité $2(p\,\delta q - q\,\delta p)$ est une fonction entière de $x = \varphi\theta$ que nous designerons par $\lambda(\varphi\theta)$. On aura par suite en mettant pour θ ces valeurs $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_\mu$ et designant les valeurs correspondantes de ε par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_\mu$ les équations suivantes:

$$\varepsilon_1 d\theta_1 = \frac{\lambda(\varphi\theta_1)}{\psi'(\varphi\theta_1)};\quad \varepsilon_2 d\theta_2 = \frac{\lambda(\varphi\theta_2)}{\psi'(\varphi\theta_2)}, \ldots\ \varepsilon_\mu d\theta_\mu = \frac{\lambda(\varphi\theta_\mu)}{\psi'(\varphi\theta_\mu)} \quad 79$$

qui ajoutées membres à membres donneront celle-ci

$$80\quad \varepsilon_1 d\theta_1 + \varepsilon_2 d\theta_2 + \ldots + \varepsilon_\mu d\theta_\mu = \frac{\lambda(\varphi\theta_1)}{\psi'(\varphi\theta_1)} + \frac{\lambda(\varphi\theta_2)}{\psi'(\varphi\theta_2)} + \ldots + \frac{\lambda(\varphi\theta_\mu)}{\psi'(\varphi\theta_\mu)}$$

Cela posé il est facile de voir que le degré de la fonction entière $\lambda(x)$

est moindre que celui de la fonction $\psi'(x)$; donc en vertu d'une formule connue le second membre de l'équation précédente s'évanouira. Il viendra donc

81... $\varepsilon_1 d\theta_1 + \varepsilon_2 d\theta_2 + \varepsilon_3 d\theta_3 + \dots + \varepsilon_\mu d\theta_\mu = 0$

d'où l'on tire en intégrant

82 ... $\varepsilon_1\theta_1 + \varepsilon_2\theta_2 + \varepsilon_3\theta_3 + \dots + \varepsilon_\mu\theta_\mu =$ à une constante

et de là

83 ... $\varphi(\varepsilon_1\theta_1 + \varepsilon_2\theta_2 + \varepsilon_3\theta_3 + \dots + \varepsilon_\mu\theta_\mu) = C$.

Le théorème est donc démontré.

La démonstration précédente suppose que toutes les racines de l'équation soient inégales, mais il est évident que la formule (83) aura encore lieu si quelques unes des quantités $\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \varphi\theta_3 \dots \varphi\theta_\mu$ ~~soient~~ deviendront égales entre elles.—

La valeur de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_\mu$ n'est pas arbitraire ; elle est déterminée par l'équation $p = \varepsilon q\, f\theta \cdot F\theta$ c'est-à-dire

84... $a_0 + a_1\varphi\theta_k + a_2(\varphi\theta_k)^2 + \dots + a_m(\varphi\theta_k)^m = \varepsilon_k\left(b_0 + b_1\varphi\theta_k + b_2(\varphi\theta_k)^2 + \dots + b_n(\varphi\theta_k)^n\right)\cdot f\theta_k \cdot F\theta_k$

Les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_\mu$ sont en vertu de l'équation $\psi(x) = 0$ des fonctions de $a_0, a_1, \dots b_0, b_1, \dots$. Si un certain nombre k de ces dernières quantités sont indéterminées on pourra en général les déterminer de la manière que k des quantités $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_\mu$ soient données. Soient donc $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_k$ données les quantités $\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \dots \theta_\mu$ deviendront des fonctions de celles-là. Le cas le plus simple et le plus important est celui où $\mu - k$ a la valeur la plus petit possible. Or il est clair qu'on peut disposer sur $\mu-1$ des quantités $a_0, a_1, \dots b_0, b_1, \dots$, donc on peut regarder les $\mu-1$ quantités $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{\mu-1}$ comme données et en suite déterminer $\varphi\theta_\mu$ en fonction de $\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \dots \varphi\theta_{\mu-1}$ de la sorte que l'équation (83) soit satisfaite.

Soit

85 $\varphi\theta_\mu = \psi\{\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \dots \varphi\theta_{\mu-1}\}$

on tire de l'équation (83) une autre valeur de $\varphi\theta_\mu$ savoir

$\varphi\theta_\mu = -\varepsilon_\mu \cdot \varphi(\varepsilon_1\theta_1 + \varepsilon_2\theta_2 + \dots + \varepsilon_{\mu-1}\theta_{\mu-1} - C)$

donc

86 .. $\varphi(\varepsilon_1\theta_1 + \varepsilon_2\theta_2 + \dots + \varepsilon_{\mu-1}\theta_{\mu-1} - C) = -\varepsilon_\mu \psi(\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \dots \varphi\theta_{\mu-1})$

Cette formule dans laquelle toutes les quantités $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{\mu-1}$ aussi bien que ~~la fonction~~ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{\mu-1}$ sont arbitraires exprime la propriété fondamentale des fonctions elliptiques. En posant $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots \varepsilon_{\mu-1} = 1$ on a

87 ... $\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_{\mu-1} - C) = -\varepsilon_\mu \psi(\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \dots \varphi\theta_{\mu-1})$

~~Pour donner un exemple soient~~

~~$p = 1 + a_1x + a_2x^2$, $q = 1$ on aura~~ l'équation

$\cancel{(1 + a_1x + a_2x^2)^2 - (1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)} = 0 = 2a_1x + (a_1^2 + 2a_2 + c^2 - e^2)\cancel{x^2 + 2a_1a_2x^3}$

~~qui est du 4e degré. On en tire~~

Cela posé considérons quelques cas particuliers.

1\. Soient

88... $\begin{cases} p = a_0 x + a_1 x^3 + \dots + a_n x^{2n+1} & = \lambda(x) \\ q = b_0 + b_1 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{2n-2} & = \lambda_1(x) \end{cases}$

dans ce cas l'équation (71)

89 ... $p^2 - q^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2) = 0$

sera du degré $4n+2$, et ses racines seront deux à deux égales mais de signes contraires. Soient donc

$\theta_{2n+2} = -\theta_1 \; ; \; \theta_{2n+3} = -\theta_2 \; ; \; \dots \quad \theta_{4n+2} = -\theta_{2n+1}$

supposons $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ données et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots \varepsilon_{2n} = 1$ l'équation (77) donnera celles-ci

90 ... $\lambda(\varphi\theta_1) = \lambda_1(\varphi\theta_1)\cdot f\theta_1\cdot F\theta_1 \; ; \; \lambda(\varphi\theta_2) = \lambda_1(\varphi\theta_2)\cdot f\theta_2\cdot F\theta_2 \; ; \dots \; \lambda(\varphi\theta_{2n}) = \lambda_1(\varphi\theta_{2n})\, f\theta_{2n}\cdot F\theta_{2n}$

$\varepsilon_{2n+1}, \varepsilon_{2n+2}, \dots \varepsilon_{4n+2}$ sont déterminées par les équations

$$\lambda(\varphi\theta_{2n+1+m}) = \varepsilon_{2n+1+m}\, \lambda_1(\varphi\theta_{2n+1+m})\cdot f\theta_{2n+1+m} \times F\theta_{2n+1+m}$$

c'est-à-dire en remarquant que $\theta_{2n+1+m} = -\theta_m$

$$-\lambda(\varphi\theta_m) = \varepsilon_{2n+1+m}\, \lambda_1(\varphi\theta_m)\cdot f\theta_m\cdot F\theta_m$$

donc en vertu des équations (90)

$$\varepsilon_{2n+1+m} = -1 \; ; \quad \text{si } m > 1 \text{ et } m < 2n+1$$

On aura de même $\varepsilon_{4n+2} = -\varepsilon_{2n+1}$

La formule (82) deviendra donc

91\. $2\theta_1 + 2\theta_2 + \dots + 2\theta_{2n} + 2\varepsilon_{2n+1}\theta_{2n+1} = C$

d'où

92... $\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_{2n} + a) = -\varepsilon\cdot\varphi\theta_{2n+1}$

ε est égal à ± 1 et déterminé par l'équation

$$\varepsilon = \frac{\lambda_1(\varphi\theta_{2n+1})\cdot f\theta_{2n+1}\cdot F\theta_{2n+1}}{\lambda(\varphi\theta_{2n+1})}$$

a est une quantité constante que nous allons déterminer.

L'équation (89) nous montre que b_0^2 est égal au produit des racines donc

$$b_0^2 = \varphi^2\theta_1\cdot\varphi^2\theta_2 \dots \varphi^2\theta_{2n}\cdot\varphi^2\theta_{2n+1}$$

on en tire:

93... $\varphi\theta_{2n+1} = \pm \dfrac{b_0}{\varphi\theta_1\cdot\varphi\theta_2 \dots \varphi\theta_{2n}}$

La quantité b_0 se détermine à l'aide des équations (90). Comme elles sont linéaires par rapport aux quantités $a_0, a_1, \dots b_0, b_1, \dots$ elles donneront b_0 et par suite $\varphi\theta_{2n+1}$ en fonction rationnelle des quantités

$$\varphi\theta_1, \varphi\theta_2, \dots \varphi\theta_{2n} \; ; \; f\theta_1\cdot F\theta_1, \; f\theta_2\cdot F\theta_2, \dots f\theta_{2n}\cdot F\theta_{2n}$$

Pour déterminer la constante a soient $\theta_1 = \theta_2 = \dots \theta_{2n}$

Alors il est clair par la forme de l'équation 89 qu'on doit avoir $b_0 = a_0 = a_1 = \ldots\ a_{n-1} = 0$. Cette équation se réduit alors à

$$x^{4n+2} = 0$$

et par suite dans ce cas $\varphi\theta_{2n+1} = 0$ donc la formule (92) donnera

$$\varphi\alpha = 0$$

et par suite

$$94 \ldots \quad \varphi(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_{2n}) = \pm \frac{b_0}{\varphi\theta_1 \cdot \varphi\theta_2 \ldots \varphi\theta_{2n}}$$

Supposons par ex. $n = 1$ on aura

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2) = \pm \frac{b_0}{\varphi\theta_1 \cdot \varphi\theta_2}$$

et pour déterminer b_0 on aura les deux équations

$$a_0\,\varphi\theta_1 + \varphi^3\theta_1 = b_0 \cdot f\theta_1 \cdot F\theta_1$$
$$a_0\,\varphi\theta_2 + \varphi^3\theta_2 = b_0 \cdot f\theta_2 \cdot F\theta_2$$

On en tire en éliminant a_0

$$b_0 = \frac{\varphi\theta_1 \cdot \varphi\theta_2 \cdot \{\varphi^2\theta_1 - \varphi^2\theta_2\}}{\varphi\theta_2 \cdot f\theta_1 \cdot F\theta_1 - \varphi\theta_1 \cdot f\theta_2 \cdot F\theta_2}$$

donc en substituant dans la formule

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2) = \pm \frac{\varphi^2\theta_1 - \varphi^2\theta_2}{\varphi\theta_2 \cdot f\theta_1 \cdot F\theta_1 - \varphi\theta_1 \cdot f\theta_2 \cdot F\theta_2}$$

Pour déterminer le signe soit $\theta_2 = 0$ on aura $\varphi\theta_1 = \mp\varphi\theta_1$ donc il faut prendre le signe inférieure et par suite

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\varphi^2\theta_1 - \varphi^2\theta_2}{\varphi\theta_1 \cdot f\theta_2 \cdot F\theta_2 - \varphi\theta_2 \cdot f\theta_1 \cdot F\theta_1}$$

Si on multiplie haut et bas de la fraction par le dénominateur en changeant le signe du second terme on trouve en réduisant

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\varphi\theta_1 \cdot f\theta_2 \cdot F\theta_2 + \varphi\theta_2 \cdot f\theta_1 \cdot F\theta_1}{1 + e^2c^2\,\varphi^2\theta_1 \cdot \varphi^2\theta_2}$$

c'est-à-dire la 1ère des formules 10 Tome II pag 105.

La formule (91) donne

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n} + \varepsilon_{2n+1} \cdot \theta_{2n+1}) = C$$

Si l'on pose $\theta_1 = \theta_2 = \ldots\ \theta_{2n} = 0$ on aura comme nous avons avons vu plus haut θ_{2n+1} et par suite $C = 0$. En faisant en même temps $\varepsilon_{2n+1} = 0$ il est clair qu'on aura en vertu de ce qui précède ce théorème :

Theoreme V Si l'expression

$$\frac{a_0\varphi\theta + a_1(\varphi\theta)^3 + \dots + a_n(\varphi\theta)^{2n+1} - (b_0 + b_1(\varphi\theta)^2 + \dots + b_{n-1}(\varphi\theta)^{2n-2}).f\theta.F\theta}{(\varphi^2\theta-\varphi^2\theta_1)(\varphi^2\theta-\varphi^2\theta_2)(\varphi^2\theta-\varphi^2\theta_3)\dots\dots(\varphi^2\theta-\varphi^2\theta_{2n})(\varphi^2\theta-\varphi^2\theta_{2n+1})}$$

reste finie en attribuant à la quantité θ les valeurs $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{2n+1}$ on aura toujours:

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_{2n} + \theta_{2n+1}) = 0$$

En faisant $\theta_1 = \theta_2 = \dots \theta_{2n+1} = \alpha$ on aura comme corollaire ce Theorème:

Theorème VI Si l'expression

$$\frac{a_0\varphi\theta + a_1(\varphi\theta)^3 + \dots + a_n(\varphi\theta)^{2n+1} - (b_0 + b_1(\varphi\theta)^2 + \dots + b_{n-1}(\varphi\theta)^{2n-2}).f\theta.F\theta}{(\varphi^2\theta - \varphi^2\alpha)^{2n+1}}$$

se reduit à une quantité finie en faisant $\theta = \alpha$ on aura

$$\varphi(2n+1)\alpha = 0.$$

ou bien si la fonction

$$a_0\varphi\theta + a_1(\varphi\theta)^3 + \dots + a_n(\varphi\theta)^{2n+1} - (b_0 + b_1(\varphi\theta)^{2} + \dots b_{n-1}(\varphi\theta)^{2n-2})\, f\theta.F\theta$$

et ses derivées ~~jusqu~~ par rapport à θ jusqu'à l'ordre $2n$ incl. se reduiront à zero pour $\theta = \alpha$ on aura

$$\varphi(2n+1)\alpha = 0.$$

On peut encore enoncer ce dernier theoreme comme il suit

Theor. VII Si les quantités $a_0, a_1, \dots b_0, b_1, \dots$ sont telles que l'équation

$$(a_0x + a_1x^3 + \dots + a_nx^{2n+1})^2 - (b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{2n-2})(1-c^2x^2)(1+e^2x^2) = a_n^2\{x^2 - \varphi^2\alpha\}^{2n+1}$$

la quantité α satisfera necessairement à l'équation

$$\varphi(2n+1)\alpha = 0$$

C'est-à-dire on doit avoir $\alpha = \dfrac{m\omega + m'\varpi i}{2n+1}$ où m et m' sont des nombres entiers.—

2. Soient maintenant

95 $$\begin{cases} p = a_0 + a_1x^2 + \dots + a_nx^{2n} = \lambda(x) \\ q = b_0x + b_1x^3 + \dots + b_{n-2}x^{2n-3} = \lambda_1(x) \end{cases}$$

Dans ce cas l'équation

96 $$p^2 - q^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2) = 0$$

sera du degré $4n$ et ses racines seront deux à deux égales mais de signe contraire. — En faisant $\theta_{2n+1} = -\theta_1$, $\theta_{2n+2} = -\theta_2$, ... $\theta_{4n} = -\theta_{2n}$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots \varepsilon_{2n-1} = 1$ on aura pour determiner $a_0, a_1, \dots b_0, b_1, \dots$

Les équations suivantes :

97 .. $\lambda(\varphi\theta_1) = \lambda_1(\varphi\theta_1)\cdot f\theta_1\cdot F\theta_1$; $\lambda(\varphi\theta_2) = \lambda_1(\varphi\theta_2)\, f\theta_2\, F\theta_2$; ... $\lambda(\varphi\theta_{m-1}) = \lambda_1(\varphi\theta_{m-1})\cdot f\theta_{m-1}\cdot F\theta_{2n-1}$

On aura ensuite
$$\varepsilon_{2n} = \frac{\lambda_1(\varphi\theta_{2n})\cdot f\theta_{2n}\cdot F\theta_{2n}}{\lambda(\varphi\theta_{2n})}$$

$$\varepsilon_{2n+1} = \varepsilon_{2n+2} = \cdots \quad \varepsilon_{4n-1} = -1 \qquad \varepsilon_{4n} = -\varepsilon_{2n} .$$

La formule (82) donnera donc

$$(97') \quad 2\theta_1 + 2\theta_2 + \cdots + 2\theta_{2n-1} + 2\varepsilon_{2n}\theta_{2n} = \text{const.}$$

de là

$$98 \quad \varphi(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{m-1} + \alpha) = -\varepsilon_{2n}\varphi\theta_{2n}$$

En faisant $\theta_1 = \theta_2 = \cdots \theta_{m-1} = 0$ on aura

$$b_0 = b_1 = \cdots \quad b_{n-2} = 0$$
$$a_0 = a_1 = \cdots \quad a_{n-1} = 0$$

donc l'équation (96) deviendra $x^{4n} = 0$. Toutes les racines sont donc alors égales à zero et par suite $\varphi\theta_{2n} = 0$. L'équation (98) donnera donc $\varphi\alpha = 0$ et par conséquent

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{2n-1}) = \pm\varphi\theta_{2n}$$

$\varphi\theta_{2n}$ se trouve en remarquant que a_0^2 est le produit de toutes les racines. donc
$$a_0^2 = \varphi^2\theta_1\cdot\varphi^2\theta_2 \cdots \varphi^2\theta_{2n}$$
et de là
$$\varphi\theta_{2n} = \pm\frac{a_0}{\varphi\theta_1\cdot\varphi\theta_2\cdots\varphi\theta_{2n-1}}$$

donc enfin

$$99 \quad \varphi(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{2n-1}) = \pm\frac{a_0}{\varphi\theta_1\cdot\varphi\theta_2\cdots\varphi\theta_{2n-1}}$$

a_0 et par suite le second membre de cette équation est une fonction rationnelle des quantités.

$$\varphi\theta_1, \varphi\theta_2 ; \ldots \varphi\theta_{2n-1} ; f\theta_1\cdot F\theta_1 ; f\theta_2\cdot F\theta_2 ; \ldots f\theta_{2n-1}\cdot F\theta_{2n-1}$$

On peut remarquer que la formule (99) doit se déduire de la formule (94), en y faisant $\theta_{2n} = 0$.

l'équation (97') donne encore

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{2n-1} + \varepsilon_{2n}\theta_{2n}) = C$$

On trouve $C = 0$. Si donc $\varepsilon_{2n} = 1$ on aura le theoreme suivant :

Theoreme VIII

Si l'expression

$$\frac{\{a_0 + a_1(\varphi\theta)^2 + a_2(\varphi\theta)^4 + \dots + a_n(\varphi\theta)^{2n} - (b_0\varphi\theta + b_1(\varphi\theta)^3 + \dots + b_{n-2}(\varphi\theta)^{2n-3}) f\theta . F\theta}{(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_1)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_2)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_3) \dots (\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_{2n})}$$

se reduit à une quantité finie pour $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots \theta_{2n}$ on aura toujours:

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{2n}) = 0.$$

En faisant $\theta_1 = \theta_2 = \dots \theta_{2n} = \alpha$ on en deduira cette autre theoreme

Theor IX

Si une équation de la forme

$$(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^{2n})^2 - (b_0 x + \dots + b_{n-2} x^{2n-3})^2 (1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = a_n^2\{x^2 - \varphi^2\alpha\}^{2n}$$

a lieu independemment de la valeur de x la quantité α satisfera necessairement à l'equation

$$\varphi(2n\alpha) = 0$$

c'est-à-dire on doit avoir $\alpha = \frac{m\omega + m'\varpi i}{2n}$ où m et m' sont des nombres entiers. —

3. Si l'on fait

100 .. $\begin{cases} p = a_0 x + a_1 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{2n-1} \\ q = b_0 + b_1 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{2n-2} \end{cases}$

ou encore

101 $\begin{cases} p = a_0 + a_1 x^2 + \dots + a_n x^{2n} \\ q = b_0 x + b_1 x^3 + \dots + b_{n-1} x^{2n-1} \end{cases}$

on demontrera de la même manière les deux theoremes suivans.

Theoreme X Si l'expression

$$\frac{a_0\varphi\theta + a_1(\varphi\theta)^3 + \dots + a_{n-1}(\varphi\theta)^{2n-1} - (b_0 + b_1(\varphi\theta)^2 + \dots b_{n-1}(\varphi\theta)^{2n-2}) . f\theta . F\theta}{(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_1)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_2) \dots (\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_{2n})^2}$$

reçoit une valeur finie pour $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots \theta_{2n}$ on aura toujours

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_{2n}) = \frac{1}{0}$$

Theoreme XI Si l'expression

$$\frac{a_0 + a_1(\varphi\theta)^2 + \dots + a_n(\varphi\theta)^{2n} - (b_0\varphi\theta + \dots + b_{n-1}(\varphi\theta)^{2n-1}) f\theta . F\theta}{(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_1)(\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_2) \dots (\varphi^2\theta - \varphi^2\theta_{2n+1})}$$

reçoit une valeur finie pour $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots \theta_{2n+1}$ on aura toujours

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{2n+1}) = \frac{1}{0}$$

En supposant $\theta_1 = \theta_2 = \dots \theta = \alpha$ on aura comme corrollaire

Theor. XII. Si l'équation

$$(a_0 x + a_1 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{2n-1})^2 - (b_0 + b_1 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{2n-2})^2 (1-c^2x^2)(1+e^2x^2) = c^2e^2b_{n-1}^2 (x^2 - \varphi^2\alpha)^{2n+1}$$

pour une valeur quelconque de x la quantité α satisfera nécessairement à l'équation

$$\cancel{\varphi(2n+1)\alpha} \qquad \varphi(2n\alpha) = \frac{1}{0}$$

Theor XIII. Si l'équation

$$(a_0 + a_1 x^2 + \dots + a_n x^n)^2 - (b_0 x + b_1 x^3 + \dots + b_{n-1} x^{2n-1})^2 (1-c^2x^2)(1+e^2x^2) = c^2e^2 b_{n-1}^2 (x^2 - \varphi^2\alpha)^{2n+1}$$

a lieu pour une valeur quelconque de x la quantité α satisfera nécessairement à l'équation

$$\varphi(2n+1)\alpha = \frac{1}{0}$$

Ainsi par ex. si l'on suppose $n = 1$ on trouve que l'équation

$$a_0^2 x^2 - b_0^2 (1-c^2x^2)(1+e^2x^2) = e^2c^2 b_0^2 (x^2 - \varphi^2\alpha)^2$$

doit donner

$$\varphi(2\alpha) = \frac{1}{0}$$

l'équation précédente donne en effet $-1 = e^2c^2\varphi^4\alpha$ et cette relation ~~donne~~ entraine l'équation $\varphi(2\alpha) = \frac{1}{0}$; comme on peut le voir par la formule

$$\varphi 2\alpha = \frac{2\varphi\alpha \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^4\alpha}.$$

Soit pour abreger $\alpha = \frac{2\omega}{2n+1}$ et $\delta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i \sin\frac{2\pi}{2n+1}$ et faisons

$$\psi\theta = \varphi\theta + \delta^{\mu}\varphi(\theta+\alpha) + \delta^{2\mu}\varphi(\theta+2\alpha) + \dots + \delta^{2n\mu}\varphi(\theta+2n\alpha)$$

$$\psi_1\theta = \varphi\theta + \delta^{\mu}\varphi(\theta-\alpha) + \delta^{2\mu}\varphi(\theta-2\alpha) + \dots + \delta^{2n\mu}\varphi(\theta-2n\alpha)$$

En changeant θ en $\theta+\alpha$ on trouvera en remarquant que $\varphi(\theta+(2n+1)\alpha) = \varphi\theta$

$$\psi(\theta+\alpha) = \delta^{-\mu}\{\varphi\theta + \delta^{\mu}\varphi(\theta+\alpha) + \delta^{2\mu}\varphi(\theta+2\alpha) + \dots + \delta^{2n\mu}\varphi(\theta+2n\alpha)\}$$

c'est-à-dire

$$\psi(\theta+\alpha) = \delta^{-\mu}.\ \psi\theta$$

de là on tire en remarquant que $\delta^{-(2n+1)\mu} = 1$

$$\{\psi(\theta+\alpha)\}^{2n+1} = \{\psi\theta\}^{2n+1}$$

La fonction $(\psi\theta)^{2n+1}$ qui est une fonction entière des quantités

$$\varphi\theta,\ \varphi(\theta+\alpha),\ \varphi(\theta+2\alpha), \dots\ \varphi(\theta+2n\alpha)$$

a donc la propriété de ne changer pas de valeur par le changement de θ en $\theta+\alpha$. Par suite on aura en vertu du theoreme

§4.

Relations remarquables entre les quantités de la forme $\varphi\left(\frac{m\omega + m'\varpi i}{2n+1}\right)$

La formule (38) du §2 donne pour la quantité $\varphi\varepsilon$ une valeur exprimée en fonctions linéaires des quantités de la forme $\varphi(m\alpha+\mu\beta)$. Or on peut à l'aide d'un theoreme ~~demontré~~ demontrés dans le § prec trouver pour $\varphi\varepsilon$ une autre expression beaucoup plus simple. En effet en vertu du theoreme VII. l'équation (40) donnera necessairement

$$\varphi(2n+1)\varepsilon = 0$$

d'où l'on tire $\varepsilon = \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}$ et par suite

$$\varphi\varepsilon = \varphi\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)$$

où m et μ sont deux nombres entiers. Il en resulte en vertu de la formule (38) qu'on pourra toujours trouver deux nombres entiers m et μ tels que

$$\varphi\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}\cdot\sum_0^{2n}{}_m\sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{mk+\mu k'}\cdot\varphi(m\alpha+\mu\beta)$$

quelles que soient d'ailleurs les valeurs des nombres entiers k et k'. On aura en substituant les valeurs de $\alpha = \frac{2\omega}{2n+1}$, $\beta = \frac{2\varpi i}{2n+1}$

$$\varphi\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}\cdot\sum_0^{2n}{}_m\sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{mk+\mu k'}\cdot\varphi\left(\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}\right)$$

Les nombres entiers m et μ du premier membre dependront de la valeur de k et k'. Par un raisonnement, que je supprime ici, je suis parvenu à demontrer que $m = -(-1)^n . n k'$, $\mu = +(-1)^n k n$ en sorte qu'on aura pour des valeurs quelconques entieres de k, k' et n

$$102. \quad \sum_0^{2n}{}_m\sum_0^{2n}{}_\mu\, \delta^{mk+\mu k'}\cdot\varphi\left(\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = -(-1)^n.(2n+1).\,\varphi\left(\frac{nk'\omega - nk\varpi i}{2n+1}\right)$$

où $\delta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$

On pourra deduire de la formule precedente plusieurs autres qui sont plus simples. Ainsi si l'on ~~fait $k=0$, qu'on~~ multiplie ~~ensuite~~ les deux membres par $\delta^{-\nu k'}$ et qu'on prend ensuite la somme par rapport à k' depuis $k'=0$ jusqu'à $k'=2n$ on trouvera

$$103 \quad \sum_0^{2n}{}_m\, \delta^{mk}.\varphi\left(\frac{2m\omega+2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = (-1)^{n+1}.\sum_0^{2n}{}_{k'}\, \delta^{-\nu k'}\varphi\left(\frac{nk'\omega - nk\varpi i}{2n+1}\right)$$

Si l'on fait successivement $k=0$, ~~ν~~ on obtiendra en developpant cette ~~deux~~ formule :

$$\varphi\left(\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{2\omega+2\nu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{4\omega+2\nu\varpi i}{2n+1}\right)+\cdots+\varphi\left(\frac{4n\omega+2\nu\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$=(-1)^{n+1}\left\{\delta^{-\nu}\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)+\delta^{-2\nu}\varphi\left(\frac{2n\omega}{2n+1}\right)+\cdots+\delta^{-2n\nu}\varphi\left(\frac{2n^2\omega}{2n+1}\right)\right\} \quad 104$$

En multipliant les deux membres de l'equation (102) par $\delta^{-\nu k}$ et prenant ensuite la somme par rapport à k depuis $k=0$ jusqu'à $k=2n$ on obtiendra

105 $$\sum_{0}^{2n}{}_{\mu}\, \delta^{\mu k'}\varphi\left(\frac{2\nu\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}\right)=(-1)^{n+1}\sum_{0}^{2n}{}_{k}\,\delta^{-\nu k}\cdot\varphi\left(\frac{nk'\omega-nk\varpi i}{2n+1}\right)$$

Pour $k'=0$ on obtiendra la formule

$$\varphi\left(\frac{2\nu\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{2\nu\omega+2\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{2\nu\omega+4\varpi i}{2n+1}\right)+\cdots+\varphi\left(\frac{2\nu\omega+4n\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$=(-1)^{n}\cdot\left\{\delta^{-\nu}\varphi\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right)+\delta^{-2\nu}\varphi\left(\frac{2n\varpi i}{2n+1}\right)+\cdots+\delta^{-2n\nu}\varphi\left(\frac{2n^2\varpi i}{2n+1}\right)\right\} \quad 106$$

Si l'on suppose par ex dans les deux formules (104, 106) $n=1$ $\nu=2$ on obtiendra:

$$\varphi\left(\frac{4\varpi i}{3}\right)+\varphi\left(\frac{2\omega+4\varpi i}{3}\right)+\varphi\left(\frac{4\omega+4\varpi i}{3}\right)=2\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{4\omega}{3}\right)+\varphi\left(\frac{4\omega+2\varpi i}{3}\right)+\varphi\left(\frac{4\omega+4\varpi i}{3}\right)=-2\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right)$$

ou bien

$$\varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+\varpi i}{3}\right)+\varphi\left(\frac{\omega-\varpi i}{3}\right)=-\sqrt{3}.i.\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+\varpi i}{3}\right)-\varphi\left(\frac{\omega-\varpi i}{3}\right)=+\sqrt{3}.i.\varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right)$$

on en tire

107 $$\left\{\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\omega+\varpi i}{3}\right)&=+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right)+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right)\\ \varphi\left(\frac{\omega-\varpi i}{3}\right)&=+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right)-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\varphi\left(\frac{\varpi i}{3}\right)\end{aligned}\right.$$

On pourra encore trouver d'autres relations, plus simples que celles exprimées par les formules (104, 106) On a en effet:

$$0=\varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)-\delta^{m}\varphi\left(\frac{\omega+m\varpi i}{2n+1}\right)+\delta^{-m}\varphi\left(\frac{\omega-m\varpi i}{2n+1}\right)+\delta^{2m}\varphi\left(\frac{2\omega+m\varpi i}{2n+1}\right)-\delta^{-2m}\varphi\left(\frac{2\omega-m\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$-\cdots+(-1)^{n}\cdot\left\{\delta^{nm}\varphi\left(\frac{n\omega+m\varpi i}{2n+1}\right)-\delta^{-nm}\varphi\left(\frac{n\omega-m\varpi i}{2n+1}\right)\right\}\quad\ldots 108$$

$$0=\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)+\delta^{m}\varphi\left(\frac{m\omega-\varpi i}{2n+1}\right)+\delta^{-m}\varphi\left(\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)-\delta^{2m}\varphi\left(\frac{m\omega-2\varpi i}{2n+1}\right)-\delta^{-2m}\varphi\left(\frac{m\omega-2\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$+\cdots-(-1)^{n}\cdot\left\{\delta^{mn}\varphi\left(\frac{m\omega-n\varpi i}{2n+1}\right)+\delta^{-mn}\varphi\left(\frac{m\omega+n\varpi i}{2n+1}\right)\right\}\quad\ldots 109$$

Ces équations peuvent remplacer la formule (102) dans toute sa généralité. Elles donneront des resultats differents pour $m=1,2,3\ldots n$, mais ceux qu'on obtiendra pour une autre valeur de m rentreront dans ceux-là.

§ 5.

Je terminerai ce second memoire par l'énoncé de plusieurs théorèmes qui me paraissent de quelque importance.

Théorème XIV. Soient pour abréger $\alpha = \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}$ où les trois nombres entiers $m, \mu, 2n+1$ ne sont pas divisible par le même facteur et

$$y = \varphi(\theta)\cdot\varphi(\alpha-\theta)\cdot\varphi(\alpha+\theta)\cdot\varphi(2\alpha-\theta)\cdot\varphi(2\alpha+\theta)\ldots\ \varphi(n\alpha-\theta)\,\varphi(n\alpha-\theta)$$

$$c_1 = c^{2n+1}\cdot\frac{1+e^2\varphi^2\alpha}{1-c^2\varphi^2\alpha}\cdot\frac{1+e^2\varphi^2 2\alpha}{1-e^2\varphi^2 2\alpha}\cdots\cdots\ \frac{1+e^2\varphi^2 n\alpha}{1-e^2\varphi^2 n\alpha}$$

$$e_1 = e^{2n+1}\cdot\frac{1-c^2\varphi^2\alpha}{1+e^2\varphi^2\alpha}\cdot\frac{1-c^2\varphi^2 2\alpha}{1+e^2\varphi^2 2\alpha}\cdots\cdots\frac{1-c^2\varphi^2 n\alpha}{1+e^2\varphi^2 n\alpha}$$

Cela posé si l'on designe par P une fonction quelconque entière des $2n$ quantités

$$\varphi\theta,\ \varphi(\theta+\alpha),\ \varphi(\theta+2\alpha)\ldots\ \varphi(\theta+2n\alpha)$$

qui aura la propriété de rester invariable par le changement de θ en $\theta+\alpha$; on pourra toujours faire

$$P = p + q\cdot\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}$$

où p et q sont deux fonctions entières de la ~~variable~~ quantité y. Si l'on designe par P' la valeur de P lorsqu'on y change le signe de α on aura en même temps

$$P' = p - q\cdot\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}$$

En designant par ν le degré de la fonction proposée P par rapport à $\varphi\theta$, les fonctions p et q seront respectivement des degrés ν et $\nu-2$ par rapport à y.

La demonstration de ce théorème est principalement fondée sur cela que les racines de l'équation

110... $$0 = x(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)\ldots(\varphi^2 n\alpha - x^2) - y(1+e^2c^2\varphi^2\alpha\cdot x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha\cdot x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha\cdot x^2)$$

sont les $2n+1$ quantités

$$\varphi\theta,\ \varphi(\theta+\alpha),\ldots\ \varphi(\theta+2n\alpha)$$

Si l'on pose par ex: $P = \varphi\theta + \varphi(\theta+\alpha) + \cdots\ \varphi(\theta+2n\alpha)$ on trouvera cette formule:

111... $$(-1)^n\cdot\varphi\theta\cdot\varphi(\alpha-\theta)\cdot\varphi(\alpha+\theta)\ldots\varphi(n\alpha+\theta)\cdot\varphi(n\alpha-\theta)\cdot e^{2n}c^{2n}\cdot(\varphi\alpha\cdot\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2$$
$$= \cancel{(-1)^n e^{2n}c^{2n}(\varphi\alpha\cdot\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2}\{\varphi\theta+\varphi(\theta+\alpha)+\varphi(\theta+2\alpha)+\cdots+\varphi(\theta+2n\alpha)\}$$

Si l'on fait:

112 $$P = \{\varphi\theta + \delta^\mu\varphi(\theta+\alpha) + \delta^{2\mu}\varphi(\theta+2\alpha)+\cdots+\delta^{2n\mu}\varphi(\theta+2n\alpha)\}^{2n+1}$$

où $$\delta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$$

P aura la propriété exquise et l'on trouvera:

113.. $$P = a_0y + a_1y^2 + a_2y^3 + \cdots + a_ny^{2n+1} + (b_0 + b_1y^2 + \cdots + b_{n-1}y^{2n-2})\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}$$

où les coefficiens $a_0, a_1,\ldots\ b_0, b_1,\ldots\ b_{n-1}$ satisfont à l'équation

$$114 \ldots \left(a_0 y + a_1 y^3 + \cdots + a_n y^{2n+1}\right)^2 - \left(b_0 + b_1 y^2 + \cdots + b_{n-1} y^{2n-2}\right)^2 (1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2) = a_n^2 (y^2 - k^2)^{2n+1}$$

pour une valeur quelconque y.

Connaissant la valeur de P pour chaque valeur de μ il est facil d'en tirer la resolution algébrique de l'équation . On a en effet en designant par P_μ la valeur de P qui repond à μ

$$115 \ldots \varphi\theta + \delta^{\mu}\varphi(\theta+\alpha) + \delta^{2\mu}\varphi(\theta+2\alpha) + \cdots + \delta^{2n\mu}\varphi(\theta+2n\alpha) = \sqrt[2n+1]{P_\mu}$$

d'où l'on tire en suite en faisant $\mu = 0, 1, 2, \ldots 2n$

$$116 \ldots \varphi(\theta + m\alpha) = \frac{1}{2n+1} \cdot \left\{ (-1)^n e^{2n} c^{2n} (\varphi\alpha \cdot \varphi 2\alpha \cdots \varphi n\alpha)^2 \cdot y + \delta^{-\mu} \cdot \sqrt[2n+1]{P_1} + \delta^{-2\mu} \cdot \sqrt[2n+1]{P_2} + \cdots + \delta^{-2n\mu} \cdot \sqrt[2n+1]{P_{2n}} \right\}$$

ce qui est l'expression d'une racine quelconque de l'équation

<u>Theoreme</u> XV. La quantité $\varphi\left(\frac{m\varpi i + k\omega}{2n+1}\right)$ pourra toujours s'exprimer algebriquement en fonction de $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$. On aura en effet

$$117 \ldots \varphi\left(\frac{m\varpi i + 2k\omega}{2n+1}\right) = \frac{i}{2n+1} \left\{ A + \delta^{-k} \cdot \sqrt[2n+1]{A_1} + \delta^{-2k} \sqrt[2n+1]{A_2} + \cdots + \delta^{-2nk} \sqrt[2n+1]{A_{2n}} \right\}$$

où $A, A_1, \ldots A_{2n}$ sont des ~~fonct.~~ quantités reelles et en même temps des fonctions <u>rationnelles</u> des deux quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$

Pour $k = 0$ on aura

$$\varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right) \cancel{\varphi\left(\frac{m\varpi i + 2k\omega}{2n+1}\right)} = \frac{i}{2n+1} \left\{ A + \sqrt[2n+1]{A_1} + \sqrt[2n+1]{A_2} + \cdots \sqrt[2n+1]{A_{2n}} \right\} \ldots 118$$

Il est à remarquer que l'une des quantités $A_1, A_2, \ldots A_{2n}$ est necessairement égale à zero. Cela se voit à l'aide de la formule (108)

La demonstration de ce theoreme se deduit des deux formules (116, 104)

<u>Theoreme</u> XVI. Si les deux quantités ω et ϖ sont liées entr'elles par l'équation $\omega = \varpi \cdot \sqrt{2n+1}$ c'est-à-dire si l'on a

$$\int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)}} = \sqrt{2n+1} \cdot \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1 + c^2x^2)(1 - e^2x^2)}}$$

où e et c sont des quantités reelles et positives ; alors la fonction φ aura la propriété suivante.

$$\cancel{\sin\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - \sin\left(\frac{4\mu\pi}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) + \cdots + (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{2n\mu\pi}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) = (-1)^{n+\mu} \cdot \sqrt{2n+1} \cdot \varphi\left(\frac{\mu\omega}{2n+1}\right)}$$

$$\sin\left(\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - \sin\left(\frac{4\mu\pi}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) + \cdots - (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{2n\mu\pi}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) = (-1)^{n+\mu} \cdot \sqrt{2n+1} \cdot \varphi\left(\frac{\mu\omega}{2n+1}\right)$$

où μ designe un nombre entier quelconque. —

Si par ex $n = 2$, $\mu = 1$ on aura $\omega = \varpi\sqrt{5}$ et

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) = -\sqrt{5} \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

Fin du second memoire

Christiania ~~le~~ 27de ~~August~~ Août 1828.