

956
 Expression algébrique de la fonction $\varphi(\frac{\omega}{n})$ dans le cas où
 $e=c=1$. Application à la Lemniscate.

34.

Nous avons traité dans le V^e §. 2. l'équation $P_n = 0$, d'où se
 fait la détermination des fonctions $\varphi(\frac{\omega}{n})$ et $\varphi(\frac{\pi i}{n})$. Cette
 équation ne paraît qu'en général résolvable algébrique-
 ment pour des valeurs quelconques de e et c ; mais il
 y a néanmoins des cas particuliers dans lesquels on
 peut la résoudre complètement, et par suite obtenir des ex-
 pression algébriques des quantités $\varphi(\frac{\omega}{n})$ et $\varphi(\frac{\pi i}{n})$ en
 fonctions de e et c . C'est cela qui arrive toutes les
 fois qu'il soit possible d'exprimer $\varphi(\frac{\pi i}{n})$ rationnelle-
 ment en $\varphi(\frac{\omega}{n})$ et des quantités connues, ce qui a lieu
 pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous ces
 cas l'équation $P_n = 0$ peut être résolue ~~d'une même~~
 par une même méthode uniforme, qui est applicable
 à une infinité d'autres équations de tous les degrés.
 J'exposerai cette méthode dans un mémoire à
 part, et je me contenterai pour le moment à
 considérer le cas le plus simple, et qui revient
 de la supposition $e=c=1$ et $n=4v+1$.

Dans ce cas on aura:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{ou} \quad \alpha = \varphi x \\ f\alpha &= \sqrt{1-\varphi^2 \alpha} \quad ; \quad F\alpha = \sqrt{1+\varphi^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

de même

$$\varphi(i\alpha) = i \cdot \varphi \alpha \quad (209)$$

ce qui se voit en mettant xi au lieu de i .
 Cette formule donne ensuite:

$$f(i\alpha) = F\alpha \quad ; \quad F(i\alpha) = f\alpha \quad (210)$$

Les deux quantités ω et ω' étant égales entre elles il est clair qu'il en sera de même des deux quantités que nous avons désignées par ω et ω' . On aura en effet

$$(211) \quad \frac{\omega}{2} = \frac{\omega'}{2} = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

En posant dans les formules (10) β au lieu de β , on en tirera en ayant égard aux équations 209 et 210.

$$(212) \quad \begin{cases} \varphi(\alpha + \beta i) = \frac{\varphi\alpha \cdot f\beta \cdot F\beta + i \cdot \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1 - \varphi^2\alpha \cdot \varphi^2\beta} \\ f(\alpha + \beta i) = \frac{f\alpha \cdot F\beta - i \cdot \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot F\alpha \cdot f\beta}{1 - \varphi^2\alpha \cdot \varphi^2\beta} \\ F(\alpha + \beta i) = \frac{F\alpha \cdot f\beta + i \cdot \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot F\beta}{1 - \varphi^2\alpha \cdot \varphi^2\beta} \end{cases}$$

Pour donc trouver les fonctions φ , f , F pour une valeur quelconque imaginaire de la variable, il suffira d'en connaître la valeur pour des valeurs réelles.

En supposant $\alpha = m\delta$, $\beta = \mu\delta$, on voit que $\varphi(m + \mu i)\delta$, $f(m + \mu i)\delta$, $F(m + \mu i)\delta$ pourront être exprimés rationnellement en les six fonctions $\varphi(m\delta)$, $\varphi(\mu\delta)$, $f(m\delta)$, $f(\mu\delta)$, $F(m\delta)$, $F(\mu\delta)$, et par suite aussi en fonctions rationnelles des trois fonctions $\varphi\delta$, $f\delta$, $F\delta$; ~~car~~ si m et μ sont des nombres entiers.

En suivant le développement on voit de même sans peine que dans le cas où $m + \mu$ est un nombre impair on aura:

$$\varphi(m + \mu i)\delta = \varphi(\delta) \cdot T$$

où T est une fonction rationnelle de $(\varphi\delta)^2$, $(f\delta)^2$, $(F\delta)^2$ c'est-à-dire de $(\varphi\delta)^2$.

En faisant $\varphi\delta = x$ on aura donc

$$\varphi(m + \mu i)\delta = x \cdot \psi(x^2).$$

en changeant ici d en di qd se changera en $\varphi(di)$
 $= i \varphi(d) = ix$; et la fonction $\varphi(m + \mu i)$ devient
 $i \varphi(m + \mu i)$; donc :

$\varphi(m + \mu i)d = x \cdot \psi(-x^2)$
 on doit par conséquent avoir $\psi(-x^2) = \psi(x^2)$; ce qui fait
 voir que la fonction $\psi(x^2)$ ne contient que des puissances
 de la forme x^{4n} . Donc on aura :

(213) $\varphi(m + \mu i)d = x \cdot T$
 où T est une fonction rationnelle de x^4 .

Cherchons par ex. l'expression de $\varphi(2+i)d$ en x .
 On a d'après les formules 212 en faisant $\alpha = 2d$
 $\beta = id$

$$\varphi(2+i)d = \frac{\varphi d \cdot f d \cdot T d + i \varphi d \cdot f d \cdot T d}{1 - (\varphi d)^2 \cdot p d}$$

(10) donne :

$$\varphi(2d) = \frac{2\varphi d \cdot f d \cdot T d}{1 + (\varphi d)^4} ; f(2d) = \frac{(f d)^2 - (\varphi d)^2 (T d)^2}{1 + (\varphi d)^4}$$

$$T(2d) = \frac{(T d)^2 + (\varphi d)^2 (f d)^2}{1 + (\varphi d)^4}$$

c'est-à-dire en remarquant que $\varphi d = x$; $f d = \sqrt{1-x^4}$ et
 $T d = \sqrt{1+x^4}$:

$$214. \begin{cases} \varphi(2d) = \frac{2x \cdot \sqrt{1-x^4}}{1+x^4} ; f(2d) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4} \\ T(2d) = \frac{1+2x^2-x^4}{1+x^4} \end{cases}$$

En substituant ces valeurs et réduisant il vient :

$$215. \varphi(2+i)d = x \cdot \frac{2-2x^8 + i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8} = xi \cdot \frac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}$$

expression algébrique de $\varphi\left(\frac{\omega}{4n+1}\right)$

~~Il nous reste à donner par hypothèse la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$
 dans le cas où n est un nombre premier de la forme $4n+1$.~~

On peut comme on sait décomposer le nombre $4v+1$ en deux carrés. Soit donc :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4v+1 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$$

Nous chercherons d'abord la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right)$; car celle-ci étant trouvée on en tire facilement la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4v+1}\right)$.

La somme des deux carrés α^2 et β^2 étant impaire l'un des nombres α et β sera pair et l'autre impair. La somme $\alpha + \beta$ est par conséquent impaire. Donc en vertu de 113 on aura

$$216. \quad \varphi(\alpha + \beta i)d = x \cdot \prod_{\mathcal{P}} \text{entières}$$

où $\mathcal{P}$ sont des fonctions rationnelles de $x'' = (\varphi d)^2$.

En supposant $d = \frac{\omega}{\alpha + \beta i}$ le premier membre de 216 se réduit à zéro; et par conséquent

$$x = \varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right) \text{ sera une racine de l'équation } \mathcal{T} = 0$$

On aura donc la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right)$ en résolvant cette équation.

D'abord on peut trouver toutes les racines de l'équation $\mathcal{T} = 0$ au moyen de la fonction φ de la manière suivante. Si $\mathcal{T} = 0$ on doit avoir

$$\varphi(\alpha + \beta i)d = 0$$

d'où l'on tire au vu de (27)

$$(\alpha + \beta i)d = m\omega + \mu\omega i = (m + \mu i)\omega$$

$$\text{et de là } d = \frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega$$

$$218. \quad x = \varphi\left(\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega\right)$$

Dans cette expression sont donc contenues toutes les racines de l'équation $\mathcal{T} = 0$. On les obtiendra en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Or je dis que les valeurs de x qui sont différentes entre elles⁵ peuvent être représentées par la formule

$$(218') \quad x = \varphi\left(\frac{\rho\omega}{\alpha+\beta i}\right)$$

où φ a toutes valeurs entières depuis $-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ jusqu'à $+\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$.
Pour le démontrer soient λ et λ' deux entiers qui satisfont à l'équation indéterminée :

$$(219) \quad \beta \cdot \lambda - \alpha \lambda' = 1$$

Soit de plus t un entier indéterminé et faisons

$$(220) \quad k = \mu \lambda + t \alpha ; \quad k' = -\mu \lambda' - t \beta$$

On en déduira sans peine :

$$\mu + \beta k + \alpha k' = 0$$

et si l'on fait :

$$\varphi = m + \alpha k - \beta k'$$

on vérifiera aisément l'équation :

$$(221) \quad \frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} = \frac{\varphi}{\alpha + \beta i} - k - k' i$$

de là on tire :

$$\varphi\left(\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega\right) = \varphi\left(\frac{\varphi}{\alpha + \beta i} - k\omega - k' \omega i\right)$$

or d'après (22) le second membre se réduit à $(-1)^{k+k'} \varphi\left(\frac{\rho\omega}{\alpha + \beta i}\right)$

$$\text{donc} \quad \varphi\left(\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega\right) = (-1)^{k+k'} \varphi\left(\frac{\rho\omega}{\alpha + \beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\pm \rho\omega}{\alpha + \beta i}\right)$$

Maintenant l'expression de φ deviendra en y substituant les valeurs de k et k' :

$$\varphi = m + \mu(\lambda\alpha + \lambda'\beta) + t(\alpha^2 + \beta^2)$$

d'où l'on voit qu'on peut prendre t tel que la valeur de φ soit, positif ou négatif, inférieur à $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ donc tel.

Cela posé soit φ plus grand que $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{4} - 1$ ($= -v - 1$)

et faisons $\varphi = v + \theta$

Toutes les racines de l'équation $T=0$ sont donc représentées par la formule (218') ; or toutes ces racines sont nécessairement différentes entre elles. En effet si l'on avait par ex. :

$$\varphi\left(\frac{\rho\omega}{\alpha + \beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\rho'\omega}{\alpha + \beta i}\right) \quad \left(\frac{\rho\omega}{\alpha + \beta i}\right) \varphi \pm \left(\frac{\rho'\omega}{\alpha + \beta i}\right) \varphi \pm$$

on aurait selon (31) en remarquant que $\omega = \omega$.

$$\frac{\rho\omega}{\alpha + \beta i} = (-1)^{m+n} \frac{\rho'\omega}{\alpha + \beta i} + (m + ni)\omega$$

d'où l'on tire :

$$\alpha n + \beta m = 0 ; \quad \zeta = (-1)^{m+n} \zeta' + \alpha m - \beta n$$

La p^{te} de ces équations donne $n = -\beta t ; m = \alpha t$ où t est un entier indéterminé. En vertu de ces relations l'expression de ζ deviendra :

$$\zeta = (-1)^{m+n} \zeta' + (\alpha^2 + \beta^2) \alpha t$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\zeta \pm \zeta'}{\alpha^2 + \beta^2} = t$$

ce qui est impossible en remarquant que ζ & ζ' sont tous deux inférieurs à $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$.

L'équation $T=0$ a donc un nombre de $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}$ racines différentes entre elles. Il faut encore examiner si l'équation en question a des racines égales.

216 on en tirera en remarquant que $\partial \phi \alpha = \partial \alpha \cdot f \alpha \cdot T \alpha$

$$(\alpha + \beta i) \cdot f(\alpha + \beta i) d \cdot T(\alpha + \beta i) d \cdot S + \left(\frac{\partial S}{\partial d} \right) \cdot \phi(\alpha + \beta i) d$$

$$= \alpha \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot f d \cdot T d + T \cdot f d \cdot T d$$

Si maintenant T a des facteurs égaux il faut que T et $\frac{\partial T}{\partial x}$ soient égaux à zéro au même temps ; l'équation précédente donnera donc

$$S \cdot f(\alpha + \beta i) d \cdot T(\alpha + \beta i) d = 0$$

or on a $\phi(\alpha + \beta i) d = 0$, donc $f(\alpha + \beta i) d = \pm 1 = T(\alpha + \beta i) d$ et par conséquent

$$S = 0$$

ce qui est impossible car nous supposons, ce qui est permis, que T et S n'aient point de facteurs communs.

Par là on voit donc que l'équation

$$T=0$$

est en x du degré $\alpha^2 + \beta^2 - 1$, et aura pour racines les quantités :

$$\pm \phi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right) ; \pm \phi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right) ; \dots ; \pm \phi\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} \cdot \frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right)$$

En faisant donc $x^2 = y$ on aura une équation

de degré $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} = 2v$, et dont les racines seront

$$\varphi^2(d); \varphi^2(2d); \varphi^2(3d); \dots \varphi^2(2vd) \quad 220$$

où l'on a fait pour abréger $d = \frac{\omega}{\alpha + \beta i}$

Cela posé on peut aisément résoudre l'équation $R=0$ à l'aide de la méthode de M. Gauss.

Soit ε une racine primitive de $\alpha^2 + \beta^2$, je dis qu'on peut exprimer les racines comme il suit :

$$221 \quad \varphi^2(d); \varphi^2(\varepsilon d); \varphi^2(\varepsilon^2 d); \varphi^2(\varepsilon^3 d); \dots \varphi^2(\varepsilon^{2v-1} d)$$

En effet en faisant

$$222 \quad \varepsilon^m = \pm a_m + t(\alpha + \beta i)$$

où a_m est ~~abstraction faite du signe~~ moindre que $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ on aura :

$$\varphi(\varepsilon^m d) = \varphi(\pm a_m d + \frac{t(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha + \beta i} \omega) = \varphi(\pm a_m d + t(\alpha - \beta i)\omega)$$

et d'après en vertu de (22) : $\varphi(\varepsilon^m d) = \pm \varphi(a_m d)$

et par suite :

$$\varphi^2(\varepsilon^m d) = \varphi^2(a_m d)$$

Je dis maintenant que tous les nombres

$$1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2v-1}$$

sont inégaux entre eux. En effet soit par ex :

$$a_m = a_n; \text{ on aura : } 0 =$$

$$223 \quad \varepsilon^m = \pm a_m + t'(\alpha + \beta i)$$

des deux équations (222), (223) on tire en éliminant a_m

$$\frac{\varepsilon^m \pm \varepsilon^n}{\alpha^2 + \beta^2} = a \text{ un nombre entier}$$

Donc en multipliant par $\varepsilon^{2m} = \varepsilon^n$; $\frac{\varepsilon^{2m} - \varepsilon^{2n}}{\alpha^2 + \beta^2}$ sera entier

et par suite $\frac{\varepsilon^{2m-2n} - 1}{\alpha^2 + \beta^2}$ ce qui est impossible car

ε est la racine primitive de $\alpha^2 + \beta^2$ et $2m-2n$ moindre

que $\alpha^2 + \beta^2 - 1$. Les v nombres $1, a_1, a_2, \dots$ sont

donc différents et par conséquent ils sont, dans un ordre

8 Différent les mêmes que les suivants

$$1, 2, 3, 4, \dots, 2v-1.$$

A cause de la formule $\varphi(\varepsilon^m \delta) = \varphi(\varepsilon_m \delta)$ on voit donc que les quantités (220) (221) sont les mêmes quoiqu'il y ait un ordre différent.

On peut maintenant résoudre l'équation $R=0$ entièrement de la même manière que l'équation 106.

On trouvera (Voy. 116) :

$$224 \quad \varphi^2(\varepsilon^m \delta) = \frac{1}{2v} \left\{ A + \theta^m v^{\frac{1}{2v}} + g_1 \theta^{-2m} v^{\frac{2}{2v}} + \dots + g_{n-1} \theta^{-(n-1)m} v^{\frac{n-1}{2v}} \right\}$$

où θ est une racine imaginaire de l'équation $\theta^{2v} - 1 = 0$.

et $v, g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ déterminées par les formules

$$\left\{ \begin{aligned} v &= \left\{ \varphi^2(\delta) + \theta \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \theta^2 \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \theta^{2v-1} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{2v-1} \delta) \right\} \\ g_k &= \frac{\varphi^2(\delta) + \theta^k \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \theta^{2k} \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \theta^{(2v-1)k} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{2v-1} \delta)}{\left\{ \varphi^2(\delta) + \theta \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \theta^2 \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \theta^{2v-1} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{2v-1} \delta) \right\}^k} \\ A &= \varphi^2(\delta) + \varphi^2(\varepsilon \delta) + \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \varphi^2(\varepsilon^{2v-1} \delta) \end{aligned} \right.$$

qui par le procédé, voir pag. 143, 144, 145. Tome II, Col II

peuvent s'exprimer rationnellement en les coefficients de l'équation $R=0$, qui seront de la forme $A + \beta i$ où A et β sont des nombres rationnels. — La formule (224) donne l'expression algébrique de toutes les racines de l'équation $R=0$. Donc les valeurs des $q + \beta i$ fonction

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right); \quad \varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha + \beta i}\right); \quad \dots \quad \varphi\left(\frac{(2v-1)\omega}{\alpha + \beta i}\right); \quad \varphi\left(\frac{2v\omega}{\alpha + \beta i}\right)$$

36.

On connaissant par ce qui précède la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha + \beta i}\right)$ on en trouvera de la même manière celle de la fonction $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{4v\alpha + 1}\right)$.

En effet Ayant la valeur de $\varphi\left(\frac{u\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ on aura celle de $\varphi\left(\frac{u\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ en changeant seulement i en $-i$. De là on tire la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i} + \frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ par la formule (10) savoir

$$(226) \quad \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i} + \frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right) = \frac{\varphi\left(\frac{u\omega}{\alpha+\beta i}\right) \cdot \sqrt{1 - \varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)} + \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right) \cdot \sqrt{1 - \varphi^4\left(\frac{u\omega}{\alpha+\beta i}\right)}}{1 - \varphi^2\left(\frac{u\omega}{\alpha+\beta i}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{u\omega}{\alpha-\beta i}\right)}$$

$$\text{or } \frac{m\omega}{\alpha+\beta i} + \frac{m\omega}{\alpha-\beta i} = \frac{2m\alpha\omega}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{2m\alpha\omega}{4v+1}$$

On connaît donc la valeur de la fonction $\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4v+1}\right)$

Pour avoir maintenant la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{4v+1}\right)$ où n a une valeur déterminée quelconque il suffit de déterminer m et t de la manière que

$$n = 2m\alpha - (4v+1)t$$

ce qui toujours possible en remarquant que les deux nombres 2α et $4v+1$ sont premiers entre eux; car alors on obtiendra:

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4v+1}\right) = \varphi\left(\frac{n\omega}{4v+1} + t\omega\right) = (-1)^t \cdot \varphi\left(\frac{n\omega}{4v+1}\right)$$

En posant par ex. $n=1$ on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4v+1}\right)$. —

37.

Le cas où $4v+1$ est de la forme $1+2^n$ est le plus remarquable; car alors l'expression de $\varphi\left(\frac{\omega}{4v+1}\right)$ ne contiendra que des racines carrées. En effet dans ce cas on a $2v = 2^{n-1}$, et par suite la formule

(227) nous montre qu'on peut déduire $\varphi(\varepsilon^u)$ de θ et v en extrayant seulement des racines carrées. or v est une fonction rationnelle de θ et $\sqrt{-1}$ et θ est déterminée par l'équation $\theta^{2^{n-1}} - 1 = 0$, d'où l'on tire θ par des racines carrées; donc aussi v

et par suite la fonction $\varphi(\varepsilon^{m\omega}) = \varphi\left(\frac{a_m \cdot \omega}{\alpha + \beta i}\right)$

Connaissant ainsi $\varphi\left(\frac{u\omega}{\alpha + \beta i}\right)$ on aura de même

$\varphi\left(\frac{u\omega}{\alpha - \beta i}\right)$ et de là par la formule (26)

la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \varphi\left(\frac{n\omega}{4V+1}\right)$; en extrayant de même des racines carrées. —

Un autre cas où l'on peut déterminer la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ par des racines carrées est celui où n est une puissance de 2, comme nous l'avons vu $n = 13$. — On connaît donc les fonctions :

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right), \quad \varphi\left(\frac{m\omega}{1+2^n}\right)$$

où dans la dernière fonction $1+2^n$ est un nombre premier.

Soient maintenant $1+2^{n_1}, 1+2^{n_2}, 1+2^{n_3}, \dots, 1+2^{n_\mu}$ plusieurs nombres premiers on connaît les fonctions

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right); \quad \varphi\left(\frac{m_1\omega}{1+2^{n_1}}\right); \quad \varphi\left(\frac{m_2\omega}{1+2^{n_2}}\right); \quad \dots \quad \varphi\left(\frac{m_\mu\omega}{1+2^{n_\mu}}\right)$$

et de là la fonction :

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n} + \frac{m_1}{1+2^{n_1}} + \frac{m_2}{1+2^{n_2}} + \dots + \frac{m_\mu}{1+2^{n_\mu}}\right) \omega$$

$$= \varphi\left(\frac{m' \cdot \omega}{2^n \cdot (1+2^{n_1})(1+2^{n_2}) \dots (1+2^{n_\mu})}\right)$$

où m' est un nombre entier, qui à cause des indéterminés $m, m_1, m_2, \dots, m_\mu$, peut avoir une valeur quelconque. On peut donc énoncer le théorème suivant :

" On peut exprimer la valeur de la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ par des racines carrées, toutes les fois que n est un nombre de la forme 2^n ou $1+2^n$, le dernier nombre étant premier, ou même un produit

de plusieurs nombres de ces deux formes.

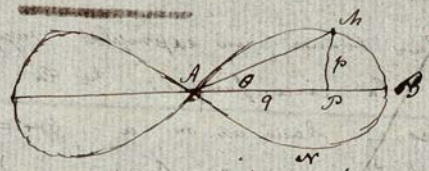
39.

En appliquant ce qui précède à la Lemniscate on parviendra
au Théorème énoncé n° 22.

Soit l'arc $Ah = \alpha$
et la corde $Ah = x$

on aura :

$$\partial \alpha = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^4}}$$



En effet l'équation polaire de la Lemniscate est

$$x = \sqrt{\cos 2\theta} \text{ , d'où } \partial \theta = -\frac{\partial x \cdot \sqrt{\cos 2\theta}}{\sin 2\theta}$$

et

$$\partial x^2 = 2x \cdot \partial \theta$$

donc

$$\partial x^2 = 2x^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{x^2 \cdot \cos 2\theta}{(\sin 2\theta)^2} \right\}$$

mais de $x = \sqrt{\cos 2\theta}$ on tire $\cos 2\theta = x^2$, $\cos^2 2\theta = x^4$

$1 - \cos^2 2\theta = 1 - x^4 = (\sin 2\theta)^2$; donc

$$\partial x^2 = 2x^2 \left\{ 1 + \frac{x^4}{1-x^4} \right\} = \frac{\partial x^2}{1-x^4}$$

et par suite

$$\partial \alpha = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^4}}$$

et

$$x = \varphi(\alpha)$$

Si l'on suppose $x=1$ on aura $\alpha = AhB = \frac{\omega}{2}$

Soit la circonférence $AhBN = \omega$. Supposons usin,

tenant qu'on veuille diviser cette circonférence en
un nombre de n parties égales, et soit l'arc Ah

$= \frac{m}{n}$, $AhBN = \frac{m}{n} \omega$; on aura :

$$Ah = \varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$$

On connaît donc la corde est par suite le m^{e} point
de division si l'on connaît la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$; or
c'est cela qui a toujours lieu lorsque n est decom-
posable en nombre premier de la forme 2 et
 $1+2^h$, comme nous avons vu dans le n° précédent.

Dans ce cas donc on peut construire les points de division à l'aide de la règle et du compas seuls ou ce qui revient au même par l'intersection de lignes droites et de cercles.

Pour donner un exemple supposons qu'on veuille diviser la circonférence de la lemniscate en cinq parties égales. — Dans ce on a $4v+1=5=2^2+1^2$ par conséquent on peut faire $\alpha=2, \beta=1$. — L'équation $T=0$ sera du quatrième degré et aura pour racines les quantités

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2+i}\right), -\varphi\left(\frac{\omega}{2+i}\right), \varphi\left(\frac{\omega}{2+i}\right), -\varphi\left(\frac{\omega}{2+i}\right)$$

L'équation elle-même devient, en vertu de

$$x^4 - 1 + 2i = 0$$

de là on tire :

$$x = (1 - 2i)^{\frac{1}{4}}$$

Soit $1 = a \cos \theta, 2 = a \sin \theta$ en sorte que

$$a = \sqrt{5}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

il vient :

$$x = \sqrt[4]{5} \{ \cos \theta - i \sin \theta \}^{\frac{1}{4}}$$

D'où l'on tire les quatre valeurs suivantes pour x

$$x = \sqrt[4]{5} \left\{ \cos \frac{\theta}{4} - i \sin \frac{\theta}{4} \right\} = \varphi\left(\frac{\omega}{2+i}\right)$$

$$x = -\sqrt[4]{5} \left\{ \cos \frac{\theta}{4} - i \sin \frac{\theta}{4} \right\}$$

$$x = \sqrt[4]{5} \left\{ \sin \frac{\theta}{4} + i \cos \frac{\theta}{4} \right\}$$

$$x = -\sqrt[4]{5} \left\{ \sin \frac{\theta}{4} + i \cos \frac{\theta}{4} \right\}$$

on a de même en changeant i en $-i$

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2-i}\right) = \sqrt[4]{5} \left\{ \cos \frac{\theta}{4} + i \sin \frac{\theta}{4} \right\}$$

donc par la formule

$$\varphi\left(\frac{4\omega}{5}\right) = \frac{\sqrt[4]{5} \left\{ (\cos \frac{\theta}{4} + i \sin \frac{\theta}{4}) \sqrt{2i} + (\cos \frac{\theta}{4} - i \sin \frac{\theta}{4}) \sqrt{-2i} \right\}}{1 - \sqrt{5}}$$

Usage des fonctions $\varphi, \wp, \zeta$ dans la transformation des fonctions elliptiques.

40

Dans les exercices du calc. int. M. Legendre montre comment on peut transformer l'intégral $\int \frac{dp}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 p}}$ qui en faisant $\sin p = x$ deviendra $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2 x^2)}}$ en d'autres intégrales de la même forme avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie en démontrant le théorème suivant:

Si l'on désigne par α la quantité $\frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\omega i}{2n+1}$ où l'un des deux nombres entiers m et μ au moins sera premier à $2n+1$ on aura

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2 y^2)(1+c_1^2 y^2)}} = \pm \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2 x^2)(1+c^2 x^2)}}$$

$$y = f(x) \cdot \frac{(\varphi^2 \alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2) \dots (\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+c^2 \varphi^2 \alpha x^2)(1+c^2 \varphi^2 2\alpha x^2) \dots (1+c^2 \varphi^2 n\alpha x^2)}$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right\}^2$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \left\{ \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + \alpha\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + n\alpha\right) \right\}^2$$

$$\alpha = f(\varphi \alpha \cdot \varphi 2\alpha \cdot \varphi 3\alpha \dots \varphi n\alpha)^2$$

f est un indéterminé, en sorte qu'on n'aît qu'une seule relation entre les quantités c, c_1, c, c_1 .

Les quantités c et c_1 pourront être positives ou négatives, et α et α_1 ~~et au moins~~

de cette manière on aura une infinité de transformations différentes. Elles sont aussi différentes de celles de M. Legendre.

Sient m et μ deux nombres entiers et faisons pour abré-

ger : 228. $\alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\omega i}{2n+1}$

on nous suppose que l'un des nombres m, μ soit premier à $2n+1$.
~~on aura en vertu des formules~~

~~$Q((m+\mu)\alpha) = 0$ $f((m+\mu)\alpha) \cdot I((2n+1)\alpha) = 1$.~~

En désignant par θ une quantité quelconque il viendra
 donc en vertu de (22)

229 $Q(\theta + (n+1)\alpha) = Q\theta$

En mettant $\theta - n\alpha$ au lieu de θ on obtiendra :

230 $Q(\theta + (n+1)\alpha) = Q(\theta - n\alpha)$

Pela paré considérons l'expression suivante

231 $Q_1(\theta) = Q(\theta) + Q(\theta + \alpha) + Q(\theta + 2\alpha) + \dots + Q(\theta + n\alpha) + \dots + Q(\theta + m\alpha)$

En mettant $\theta + \alpha$ au lieu de θ il viendra à cause de l'équa-
 tion (229)

232. $Q_1(\theta + \alpha) = Q_1(\theta)$

Donc si m désigne un nombre quelconque entier :

233. $Q_1(\theta + m\alpha) = Q_1(\theta)$

En vertu de l'équation 230 on peut écrire l'expression de
 $Q_1(\theta)$ comme il suit :

234. $Q_1(\theta) = Q(\theta) + Q(\theta + \alpha) + Q(\theta - \alpha) + Q(\theta + 2\alpha) + Q(\theta - 2\alpha) + \dots$
 $\dots + Q(\theta + n\alpha) + Q(\theta - n\alpha)$

c'est-à-dire en vertu de la formule

$Q(\theta + \nu\alpha) + Q(\theta - \nu\alpha) = \frac{x \cdot Q\theta \cdot f(\nu\alpha) \cdot I(\nu\alpha)}{1 + e^2 \cdot (Q\theta)^2 \cdot (f(\nu\alpha))^2}$

$Q_1(\theta) = Q\theta + \frac{2Q\theta \cdot f\alpha \cdot I\alpha}{1 + e^2 \cdot Q\alpha^2 \cdot Q\theta} + \frac{2Q\theta \cdot f2\alpha \cdot I2\alpha}{1 + e^2 \cdot Q2\alpha^2 \cdot Q\theta} + \dots + \frac{2Q\theta \cdot fn\alpha \cdot In\alpha}{1 + e^2 \cdot Qn\alpha^2 \cdot Q\theta}$ 235

En faisant $Q\theta = x$ $Q_1(\theta)$ devient une fonction rationnelle
 de x . En la désignant par $\psi(x)$ on aura :

$\psi(x) = x \cdot \left\{ 1 + \frac{2f\alpha \cdot I\alpha}{1 + e^2 \cdot Q\alpha^2 \cdot x^2} + \dots + \frac{2fn\alpha \cdot In\alpha}{1 + e^2 \cdot Qn\alpha^2 \cdot x^2} \right\}$ 236

14 Soit maintenant ε une "quantité" quelconque je dis qu'on aura :

$$1 - \frac{\psi x}{\varphi \varepsilon} = \frac{(1 - \frac{x}{\varphi \varepsilon})(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + \alpha)})(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2\alpha)}) \dots (1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + m\alpha)})}{(1 + \varepsilon^2 \varphi^2 \alpha^2)(1 + \varepsilon^2 \varphi^2 2\alpha^2) \dots (1 + \varepsilon^2 \varphi^2 m^2 \alpha^2)}$$

En effet il est clair que la fonction :

$$R = (1 - \frac{\psi x}{\varphi \varepsilon}) \cdot (1 + \varepsilon^2 \varphi^2 \alpha^2) \dots (1 + \varepsilon^2 \varphi^2 m^2 \alpha^2) \quad (238) \text{ sera entière}$$

et de degré $m+1$, mais en faisant $x = \varphi \varepsilon$, ψx deviendra $= \varphi \varepsilon$ et par suite R se réduit à zéro pour cette valeur de x . De même en faisant $x = \varphi(\varepsilon + m\alpha)$

où m est entier on a $\psi(x) = \varphi(\varepsilon + m\alpha)$ c'est-à-dire
 et vertu de $\S$ (233) $\psi(x) = \varphi \varepsilon$ donc $1 - \frac{\psi x}{\varphi \varepsilon} = 0$

et par conséquent, $x = \varphi(\varepsilon + m\alpha)$ sera une racine de l'équation $R=0$ quel que soit le nombre entier m . Or toutes ces quantités :

$$\varphi \varepsilon, \varphi(\varepsilon + \alpha), \varphi(\varepsilon + 2\alpha), \dots, \varphi(\varepsilon + m\alpha) \quad (239)$$

sont en général différentes entre elles. En effet si l'on avait

$$\varphi(\varepsilon + m\alpha) = \varphi(\varepsilon + \mu\alpha)$$

il en résulterait en vertu de (31) :

$$\varepsilon + m\alpha = (-1)^{k+k'} \{ \varepsilon + \mu\alpha \} + k\omega + k'\omega i$$

$$\text{d'où } k+k' = 2k''; \quad (m'-\mu')\alpha = (k''+L)\omega + (k''-L)\omega i$$

$$k = k''+L; \quad k' = k''-L \quad \text{de là on tire en substituant la valeur de } \alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\omega i}{2m+1} :$$

$$(m'-\mu')(m+\mu) = (2n+1)(k''+L)$$

$$(m'-\mu')(m-\mu) = (2n+1)(k''-L)$$

$$\text{et } m'-\mu' = (2n+1) \cdot \frac{k''}{m} = (2n+1) \frac{L}{\mu}$$

équation impossible car nous avons supposé que l'un des deux nombres m et μ soit premier à $2n+1$, et $m'-\mu'$ est toujours moindre que $2n+1$.

15. Maintenant les $(2n+1)$ quantités (239) étant différentes entre elles, elles sont précisément les $2n+1$ racines de l'équation $R=0$.
On a donc :

$$240. R = A(1 - \frac{x}{\varphi \varepsilon})(1 - \frac{x}{\varphi(1+\alpha)}) \dots (1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon+n\alpha)})$$

où A est un coefficient constant, qu'on trouve en attribuant à x une valeur particulière, et faisant par ex. $x=0$ on a $R=A$
or l'équation (239) pour $x=0$: $R=1$ donc $A=1$ et par conséquent l'équation (237) a lieu.

En multipliant cette équation par $\varphi \varepsilon$ et faisant ensuite $\varepsilon=0$ il viendra :

$$241. \psi(x) = g x \frac{(1 - \frac{x}{\varphi \alpha})(1 - \frac{x}{\varphi 2\alpha}) \dots (1 - \frac{x}{\varphi n\alpha})}{(1 + e^2 \varphi^2 \alpha^2 x^2) \dots (1 + e^2 \varphi^2 n\alpha^2 x^2)}$$

où g est la valeur de $\frac{\varphi \varepsilon}{\varphi \varepsilon}$ pour $\varepsilon=0$. En faisant dans $\varepsilon=0$ après avoir divisé par $\varphi \varepsilon$ on trouve pour cette constante l'expression suivante :

$$242. g = 1 + f\alpha \cdot \bar{f}\alpha + 2 f^2\alpha \cdot \bar{f}^2\alpha + \dots + 2 f^n\alpha \cdot \bar{f}^n\alpha$$

~~En remarquant que $\varphi(2n-m)\alpha = \varphi \varepsilon$~~

En faisant dans (230) $\varepsilon = n\alpha - (m'+1)\alpha$ on trouve

$\varphi(2n\alpha - m'\alpha) = \varphi(-(m'+1)\alpha) = -\varphi(m'+1)\alpha$. donc on peut écrire l'expression de ψx comme il suit :

$$243. \psi x = g \cdot x \cdot \frac{(1 - \frac{x^2}{\varphi^2 \alpha}) (1 - \frac{x^2}{\varphi^2 2\alpha}) \dots (1 - \frac{x^2}{\varphi^2 n\alpha})}{(1 + e^2 \varphi^2 \alpha^2 x^2) (1 + e^2 \varphi^2 2\alpha^2 x^2) \dots (1 + e^2 \varphi^2 n\alpha^2 x^2)}$$

43.

Faisons maintenant dans l'expression de $1 - \frac{\psi x}{\varphi \varepsilon}$

$\varepsilon = \frac{\omega}{2}$. Alors on aura en faisant pour abréger

$$244. \delta = (1 + e^2 \varphi^2 \alpha^2 x^2) (1 + e^2 \varphi^2 2\alpha^2 x^2) \dots (1 + e^2 \varphi^2 n\alpha^2 x^2)$$

$$1 - \frac{\psi x}{\varphi \frac{\omega}{2}} = (1 - \frac{x}{\varphi \frac{\omega}{2}}) \cdot \left\{ 1 - \frac{x}{\varphi(\frac{\omega}{2} + \alpha)} \right\} \left\{ 1 - \frac{x}{\varphi(\frac{\omega}{2} + 2\alpha)} \right\} \dots \left\{ 1 - \frac{x}{\varphi(\frac{\omega}{2} + n\alpha)} \right\} \cdot \frac{1}{\delta}$$

et on a en faisant dans (230) $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$, on obtient

10.

$$\theta = \frac{\omega}{2} + (n-m'-1)\alpha$$

$$Q\left(\frac{\omega}{2} + (n-m')\alpha\right) = Q\left(\frac{\omega}{2} - (m'+1)\alpha\right) = (1-1)$$

donc à cause de la formule (Vg 14) : $Q\left(\frac{\omega}{2} - \alpha\right) = Q\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)$
il viendra :

$$Q\left(\frac{\omega}{2} + (n-m')\alpha\right) = Q\left(\frac{\omega}{2} + (m'+1)\alpha\right)$$

En vertu de cette équation il est clair qu'on peut écrire
l'expression de $1 - \frac{\psi x}{Q_1 \frac{\omega}{2}}$ comme il suit :

$$245. 1 - \frac{\psi x}{Q_1 \frac{\omega}{2}} = (1-cx) \cdot \left(1 - \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+\alpha)}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+2\alpha)}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+n\alpha)}\right)^2 \cdot \frac{1}{S}$$

En changeant x en $-x$ on aura de même :

$$246. 1 + \frac{\psi x}{Q_1 \frac{\omega}{2}} = (1+cx) \cdot \left(1 + \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+\alpha)}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+2\alpha)}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+n\alpha)}\right)^2 \cdot \frac{1}{S}$$

Si donc on fait

$$247. y = k \cdot \psi x ; \quad c_1 = \frac{1}{k \cdot Q_1 \frac{\omega}{2}} \quad \text{où } k \text{ est indéterminé}$$

et de plus :

$$248. \begin{cases} t = \left(1 - \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+\alpha)}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+n\alpha)}\right) \\ t_1 = \left(1 + \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+\alpha)}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}+n\alpha)}\right) \end{cases}$$

on aura :

$$249. 1 - c_1 y = (1-cx) \cdot \frac{t}{S} ; \quad 1 + c_1 y = (1+cx) \cdot \frac{t_1}{S}$$

Entièrement de la même manière on trouvera en
faisant

$$250. \begin{cases} S = \left(1 - \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}i+\alpha)}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}i+n\alpha)}\right) \\ S_1 = \left(1 + \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}i+\alpha)}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{Q(\frac{\omega}{2}i+n\alpha)}\right) \end{cases}$$

$$\text{et } 251. c_i = \frac{i}{k \cdot Q_1(\frac{\omega}{2}i)}$$

les deux équations :

$$252. 1 - c_i y = (1-ix) \cdot \frac{S}{S} ; \quad 1 + c_i y = (1+ix) \cdot \frac{S_1}{S}$$

17. Les équations 249 et 252. donneront :

$$(1 - e^2 y^2) = (1 - e^2 x^2) \cdot \frac{t^2 t_1^2}{e^2}; \quad (1 + e^2 y^2) = (1 + e^2 x^2) \cdot \frac{s^2 s_1^2}{e^2}$$

par conséquent :

$$253. \sqrt{(1 - e^2 y^2)(1 + e^2 y^2)} = \pm \frac{t t_1 s s_1}{e^2} \sqrt{(1 - e^2 x^2)(1 + e^2 x^2)}$$

Maintenant l'expression de y donne $dy = \frac{P}{e^2} \cdot dx$ où P sera une fonction entière de x du degré $4n$

donc :

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - e^2 y^2)(1 + e^2 y^2)}} = \pm \frac{P}{t t_1 s s_1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1 - e^2 x^2)(1 + e^2 x^2)}}$$

on se dit que la fonction $\frac{P}{t t_1 s s_1}$ se réduira à une quantité

constante. — En effet on a $1 - e^2 y^2 = (1 - ex) \cdot \frac{t^2}{e}$; donc

en différenciant et mettant pour dy sa valeur $\frac{P dx}{e^2}$

$$P = \frac{t}{e} \left\{ e t_1 - (1 - ex) \left(e \frac{dt}{dx} + t \frac{dx}{dx} \right) \right\}$$

On voit donc que P est divisible par t . — De la même manière on prouvera que P est divisible par les trois fonctions t_1, s, s_1 . Si donc deux quelconques des quatre fonctions t, t_1, s, s_1 n'ont point de facteur

commun P sera divisible par leur produit. Or

c'est cela qu'on peut voir aisément à l'aide des ex.

Prendons de ces fonctions, $\frac{P}{t \cdot t_1 \cdot s \cdot s_1}$ est donc une fonc.

tion entière de x . or P est du degré $4n$; et chacune

des fonctions t, t_1, s, s_1 du degré n . donc il

est prouvé que $\frac{P}{t \cdot t_1 \cdot s \cdot s_1}$ est une quantité constante.

En la désignant par α , il viendra donc :

$$254. \frac{dy}{\sqrt{(1 - e^2 y^2)(1 + e^2 y^2)}} = \pm \alpha \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1 - e^2 x^2)(1 + e^2 x^2)}}$$

Pour déterminer α il suffit d'attribuer à x une valeur particulière. En faisant par ex. $x = 0$ on aura

$$t = t_1 = s = s_1 = 1; \quad P = e^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} = k \cdot \sqrt{x}$$

18. si on différentie l'expression de ψx et faisant ensuite $x=0$ il viendra $\psi'x = g$ donc

$$255. a = h.g$$

On peut donner aux expressions ~~des quantités~~ ^{de} ϵ, e, g, a d'autres formes plus simples et qui mettront en évidence plusieurs propriétés remarquables de ces quantités.

Dans la formule 240 on voit que le coefficient de x^{n+1} dans la fonction ϕ est $-\frac{A}{\phi \epsilon \cdot \phi(\epsilon+\alpha) \dots \phi(\epsilon+n\alpha)}$ et d'après 237 le même coefficient sera $-\frac{(-1)^n}{\phi_1 \epsilon (\phi \alpha \cdot \phi 2\alpha \dots \phi n\alpha)^2}$ donc en remarquant que $A=1$

$$\phi_1(\epsilon) = \frac{(-1)^n g}{(\phi \alpha \cdot \phi 2\alpha \dots \phi n\alpha)^2 \cdot \phi \epsilon \cdot \phi(\epsilon+\alpha) \cdot \phi(\epsilon+2\alpha) \dots \phi(\epsilon+n\alpha)}$$

En faisant dans 236, 243 $x = \frac{1}{\epsilon}$ après avoir divisé par x on obtiendra deux valeurs de $\frac{\psi x}{x}$ savoir

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{g (-1)^n}{(\epsilon \epsilon)^{2n} (\phi \alpha \cdot \phi 2\alpha \dots \phi n\alpha)^2}$$

donc en les égalant:

$$256 \quad g = (-1)^n \cdot (\epsilon \epsilon)^{2n} (\phi \alpha \cdot \phi 2\alpha \dots \phi n\alpha)^4$$

et par conséquent

$$257 \quad \phi_1(\epsilon) = (\epsilon \epsilon)^{2n} (\phi \alpha \cdot \phi 2\alpha \dots \phi n\alpha)^2 \cdot \phi \epsilon \cdot \phi(\epsilon+\alpha) \cdot \phi(\epsilon+2\alpha) \dots \phi(\epsilon+n\alpha) \\ = \phi(\epsilon) + \phi(\epsilon+\alpha) + \phi(\epsilon+2\alpha) + \dots + \phi(\epsilon+n\alpha)$$

Cette équation exprime une propriété remarquable de la fonction ϕ .

En y posant $\epsilon = \frac{\omega}{2}$ et $\epsilon = \frac{\omega i}{2}$ on obtiendra

$$258 \quad \begin{cases} \phi_1(\frac{\omega}{2}) = \frac{1}{h \epsilon_1} = (\epsilon \epsilon)^{2n} \delta^2 \phi(\frac{\omega}{2}) \cdot \phi(\frac{\omega}{2} + \alpha) \dots \phi(\frac{\omega}{2} + n\alpha) \\ \phi_1(\frac{\omega i}{2}) = \frac{i}{h \epsilon_1} = (\epsilon \epsilon)^{2n} \delta^2 \phi(\frac{\omega i}{2}) \cdot \phi(\frac{\omega i}{2} + \alpha) \dots \phi(\frac{\omega i}{2} + n\alpha) \end{cases}$$

où ϕ' on a fait pour abréger

$$259. \delta = \phi \alpha \cdot \phi 2\alpha \cdot \phi 3\alpha \dots \phi n\alpha.$$

25

260.
$$\begin{cases} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} = \frac{\omega}{(2n+1)\pi} \cdot \text{Arc sin } (y) \\ y = \frac{x}{\frac{\omega}{2n+1}} \cdot \frac{\left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2(\frac{\omega}{2n+1})}\right\} \cdots \left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2(\frac{n\omega}{2n+1})}\right\}}{\left\{1 + e^2\varphi^2(\frac{\omega}{2n+1}) \cdot x^2\right\} \cdots \left\{1 + e^2\varphi^2(\frac{n\omega}{2n+1}) \cdot x^2\right\}} \end{cases}$$

B. Dans le cas où $x = \frac{2\mu\omega i}{2n+1}$ on trouvera de la même manière la formule suivante

261
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} = \alpha' \cdot \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}}$$

$$e_1 = \frac{1}{e^{2n+1} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \right\}^4}$$

$$a' = \frac{1}{e^{2n} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \right\}^4}$$

$$y = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}} \cdot x \frac{\left\{x^2 - \varphi^2\left(\frac{\omega i}{2n+1}\right)\right\} \left\{x^2 - \varphi^2\left(\frac{2\omega i}{2n+1}\right)\right\} \cdots \left\{x^2 - \varphi^2\left(\frac{n\omega i}{2n+1}\right)\right\}}{\left\{1 + e^2\varphi^2\left(\frac{\omega i}{2n+1}\right) \cdot x^2\right\} \left\{1 + e^2\varphi^2\left(\frac{2\omega i}{2n+1}\right) \cdot x^2\right\} \cdots \left\{1 + e^2\varphi^2\left(\frac{n\omega i}{2n+1}\right) \cdot x^2\right\}}$$

La formule précédente a lieu pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité.

Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques il faudrait connaître toutes les transformations possibles; or je suis parvenu à démontrer qu'on les obtiendra toutes en combinant celle de M. Legendre avec celles contenues dans la formule () et cela en supposant même qu'on cherche la relation la plus générale possible entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.

Ce théorème, dont les conséquences comprennent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles propriétés de ces fonctions.

19. En remarquant que

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2n-m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + (m'+1)\alpha\right)$$

et
$$\varphi\left(\frac{\omega i}{2} + (2n-m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + (m'+1)\alpha\right)$$

on tire de ces équation en faisant :

$$260. \quad k(e^2)^n \delta^2 = f^2$$

$$261. \quad \begin{cases} \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right\}^2 \\ \frac{1}{c_1} = \pm \frac{f}{c} \left\{ \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + \alpha\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + n\alpha\right) \right\}^2 \end{cases}$$

en multipliant et remarquant qu'on aura (18) :

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + \alpha\right) = \frac{i}{ec}$$

on obtiendra :

$$\pm \frac{1}{c_1} = \frac{(-1)^n f^2}{(ec)^{2n+1}} \quad c_1 c_1 = \pm \frac{(ec)^{2n+1}}{f^2} \quad 262$$

de même on obtiendra en divisant :

$$263. \quad \begin{cases} \pm \frac{c_1}{c_1} = (-1)^n \frac{c}{c} (ec)^{2n} \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right\}^4 \\ \pm \frac{c_1}{c_1} = (-1)^n \frac{c}{c} (ec)^{2n} \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + \alpha\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + n\alpha\right) \right\}^4 \end{cases}$$

Nous avons trouvé précédemment $a = k.g$

donc : et $g = (-1)^n (ec)^{2n} \delta^4$

$$264. \quad a = f \cdot \delta^2 \cdot (-1)^n$$

de même nous avons $y = k \cdot \psi(x)$ donc en vertu de (243)

$$265. \quad y = (-1)^n f \cdot x \frac{(\varphi^2 x - x^2)(\varphi^2 \alpha - x^2)(\varphi^2 3\alpha - x^2) \dots (\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1 + e^2 \varphi^2 x^2)(1 + e^2 \varphi^2 \alpha x^2) \dots (1 + e^2 \varphi^2 n\alpha x^2)}$$

Les valeurs précédentes de c_1 , c_1 , a et y donneront

$$266. \quad \frac{dy}{\sqrt{(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)}} = \pm \frac{a \cdot dx}{\sqrt{(1 - c_1^2 x^2)(1 + e_1^2 x^2)}}$$

20 et de là :

$$(267) \int \frac{dy}{\sqrt{(1-c^2 y^2)(1+e^2 y^2)}} = \pm \alpha. \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2 x^2)(1+e^2 x^2)}}$$

44.

Par les formules : ~~261~~ 261. les valeurs des quantités c_1 et e_1 sont exprimées en c et e à l'aide de la fonction φ . or on peut aussi les déterminer à l'aide d'une équation algébrique. En effet

$$\text{on a : } \left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \right\}^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{f\alpha}{f\alpha} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1 - c^2 \varphi^2 \alpha}{1 + e^2 \varphi^2 \alpha}$$

$$\text{et } \left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \right\}^2 = -\frac{1}{e^2} \left(\frac{f\alpha}{f\alpha} \right)^2 = -\frac{1}{e^2} \cdot \frac{1 + e^2 \varphi^2 \alpha}{1 - c^2 \varphi^2 \alpha}$$

donc il est clair que les ^{valeurs} ~~expressions~~ de c_1 et e_1 pourront être exprimées en fonctions rationnelles et symétriques des quantités $\varphi\alpha, \varphi2\alpha, \dots, \varphi n\alpha$.

Pi donc $2n+1$ est un nombre premier on peut ~~toujours~~ en vertu de ce qu'on a vu dans §. V. déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation algébrique du $(2n+2)^{\text{me}}$ degré. On peut encore démontrer que la même chose aura lieu dans le cas où $2n+1$ est un nombre composé. On peut même alors déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation d'un degré moindre que $2n+2$.

Pour chaque valeur de $2n+1$ on aura donc un certain nombre de transformations correspondantes.

45.

Il a été supposé dans ce qui précède que c et e soient des quantités réelles et positives ; mais après avoir exprimé c_1 et e_1 en c et e par

21.

des équations algébriques, il est clair que la formule (266) aura de même lieu en supposant donnant à c et c des valeurs réelles ou imaginaires quelconques. — Dans le cas où (c^2, c^2) sont réelles on peut même se servir des expressions (261) (265). Mais alors ω et $\bar{\omega}$ ne seront pas toujours des quantités réelles. Au reste l'une ~~de~~ des quantités c_1 et c_2 peut à cause de l'indétermination f être prise à volonté; seulement il faut excepter les valeurs zéro et l'infini.

Si l'on suppose c et c réels ~~c_1 et c_2 réels~~ et $m+1$ premier, les valeurs de c_1 et c_2 seront imaginaires excepté deux d'entre elles qui répondent l'une à $\alpha = \frac{2m\omega}{2n+1}$ et l'autre à ~~$\alpha = \frac{2\mu\omega i}{2n+1}$~~ $\alpha = \frac{2\mu\omega i}{2n+1}$

A. Supposons d'abord $\alpha = + \frac{2m\omega}{2n+1}$

Dans ce cas on aura: (261)

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2m\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2 \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega}{2} + n \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) \right\}^2$$

Soit $\mu \cdot 2m = (2n+1) \cdot t \pm a_m$ où t est entier et a_m entier et positif, moindre que $\frac{2n+1}{2}$; on aura

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \mu \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_m\omega}{2n+1} + t\right) = (-1)^{\pm} \varphi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_m\omega}{2n+1}\right) \\ = \pm \varphi\left(\frac{2n+1 - 2a_m}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right); \text{ or il est clair les nombres}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ seront les mêmes que les suivants

1, 2, 3; ... n mais dans ordre différent

donc l'expression de $\frac{1}{c_1}$ pourra se mettre sous

$$268. \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2$$

de même l'équation (263) donnera

$$269. \frac{e_1}{c_1} = \mp (-1)^n \cdot \frac{e}{c} \cdot (cd)^{2n} \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2$$

Soit maintenant $c=1$, $c_1=1$ on aura
~~en posant le signe inférieur~~ en posant $\pm (-1)^n = 1$

$$269' e_1 = \mp e^{2n+1} \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2$$

$$270. \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2 x^2)}} + \text{const.}$$

$$271. y = (\mp) x \cdot \frac{\left\{ \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \left\{ \varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \cdots \left\{ \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\}}{\left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\} \left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\} \cdots \left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\}}$$

$$y = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}} \#$$

$$272. a = f \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \cdots \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) \right\}^2 (-1)^n$$

ou bien,

$$273. a = \left\{ \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \cdots \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)} \right\}^2 \cdot (-1)^n$$

Si l'on suppose e moindre que l'unité, ou
 égale à l'unité e_1 sera toujours moindre
 que e , et pour un lorsque $2n+1$ est un
 grand nombre e_1 sera d'une petitesse extrême.

47.

Dans l'équation 270. le signe du second membre
 dépend de la grandeur de x ; mais il est toujours

28 On le détermine aisément comme il suit. On a par ce qui précède

$$\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)} = \pm \frac{t.t. \cdot g.g.}{e^2} \cdot \sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}$$

En supposant x réel e^2 sera toujours fini et positif de même que $\sqrt{1+e^2y^2}$ et $\sqrt{1+e^2x^2}$; le signe du second membre de l'équation est donc le même que celui de la quantité

$$\left(\frac{\infty - \frac{1+501}{14N^2}}{14N^2} \right) = x \cdot t.t. \cdot g.g. \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1+y^2}}$$

maintenant on a en vertu de

$$g.g. = \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2(\frac{\omega}{2}i + a)} \right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2(\frac{\omega}{2}i + na)} \right)$$

$$\text{ou } \varphi\left(\frac{\omega}{2}i + a\right) = \frac{i}{e} \cdot \frac{f_a}{f_x} \text{ et donc}$$

$$g.g. = \left\{ 1 + \left(\frac{f_x \cdot x}{e \cdot f_a} \right)^2 \right\} \dots \left\{ 1 + \left(\frac{f_{na} \cdot x}{e \cdot f_{na}} \right)^2 \right\}$$

donc en remarquant que x est dans ce cas que nous considérons réel, on voit que $g.g.$ sera toujours une quantité positive. or $t.t.$ est réel donc la quantité $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$ sera de même positive, et par conséquent le signe dont il s'agit sera le même que celui de la quantité $t.t.$. Il n'est pas difficile de voir en vertu de 248 et en mettant pour x sa valeur

$$\frac{2m\omega}{2n+1} \text{ qu'on aura : } t.t. = \left\{ 1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)} \right\} \left\{ 1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)} \right\} \dots \left\{ 1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)} \right\}$$

quantité qui est positive depuis $x = 0$ jusqu'à

$x = \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$, négative depuis $x = \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à

$x = \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$, positive depuis $x = \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ à

$x = \varphi\left(\frac{5}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ etc. Si x est plus grand que

l'unité $t.t.$ aura toujours le même signe savoir $(-1)^n$.

§ Sans ce cas l'équation (270) donnera donc en intégrant depuis $x = 1$.

$$274. \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1+e^2 y^2)}} = \cancel{c.f.a.} \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+e^2 x^2)}}$$

Si la valeur de x est moindre que l'unité on aura

$$275. \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}} = \cancel{c.f.a.} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2 x^2)}} + \text{const}$$

entre les limites $x = \varphi\left(\frac{4m-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ et $x = \varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$

et :

$$276. - \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}} = \cancel{c.f.a.} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2 x^2)}} + \text{const}$$

entre les limites $x = \varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ et $x = \varphi\left(\frac{4m+3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$

Si l'on suppose par exemple x renfermé entre les limites $-\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ et $+\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ on aura en intégrant depuis $x=0$

$$277. \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}} = \cancel{c.f.a.} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2 x^2)}}$$

en faisant $x = \varphi\left(\frac{\omega}{(2n+1) \cdot 2}\right)$ on aura $y = (-1)^n$ et par suite :

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}} = \frac{\alpha \omega}{2(2n+1)} (-1)^n$$

d'où

$$278. (-1)^n \alpha = \frac{4n+2}{\omega} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}}$$

Cette expression de α est très commode pour le calcul. En négligeant les quantités de l'ordre e^2 on obtiendra

$$279. (-1)^n \alpha = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{\omega} \quad \text{et de là}$$

En substituant la formule (277) donnera la suivante en négligeant toujours e^2 :

Sur l'intégration de l'équation séparée:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\mu y^2)}} = a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\mu x^2)}}$$

Comme on sait on peut toujours intégrer l'équation () présenter l'intégrale complète de l'équation () sous une forme algébrique lorsque la quantité constante est un nombre rationnel, quelle que soit d'ailleurs la valeur réelle ou imaginaire de μ . Mais si a n'est pas un nombre rationnel la même chose n'aura plus lieu. Je suis à cet égard parvenu aux théorèmes suivants:

Théor. 1^{er}. En supposant a réel il faut nécessairement pour que l'équation soit intégrable algébriquement que a soit en même temps un nombre rationnel.

Théor. 2^e. En supposant a imaginaire il faut nécessairement pour que l'équation () soit intégrable algébriquement, que a soit de la forme $m + \sqrt{-1} \cdot n$ si m et n sont des nombres rationnels. Dans ce cas la quantité μ n'est pas arbitraire: mais elle doit satisfaire à une équation qui a une infinité de racines, réelles et imaginaires. L'une quelconque de ces valeurs de μ satisfait à la question.

Les deux théorèmes sont très commodes. La démonstration de ces théorèmes fait partie d'une théorie très étendue des fonctions elliptiques, dont je n'occupe

27 dans ce moment, et qui paraîtra aussi tôt qu'il me sera possible. Je me contenterai ici à considérer un cas particulier, qu'on peut tirer des formules de § préc.

Si l'on suppose dans la formule (270)

$$e = \frac{1}{e}$$

et e.g.i à la place de y il viendra

$$782. \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}} = a \sqrt{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}$$

ou :

$$783. y = \pm \sqrt{1-e} \cdot x^{n+1} \frac{\left\{ \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \dots \left\{ \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\}}{\left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \dots \left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\}}$$

e est déterminé par l'équation (269) qui deviendra

$$1 = e^{n+1} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{\omega}{2}\right) \dots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}, \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2$$

et a par :

$$a = \left\{ \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \dots \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{\omega}{2}\right) \dots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}, \frac{\omega}{2}\right)} \right\}^2 \cdot \frac{1}{e} \quad \# \quad 784$$

On connaît donc une intégrale particulière de l'équation (782) et par conséquent on peut en trouver l'intégrale complète. —

Dans le cas ^{que} nous considérons la valeur de a est $\sqrt{n+1}$, ce qu'on démontrera aisément comme il suit :

~~En mettant~~ En mettant dans l'équation (282) $y = z\sqrt{1-e}$

et intégrant ensuite entre les limites zéro et $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$

il viendra

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-e^2z^2)}} = \int_0^{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)} a \cdot \frac{\omega}{4n+2}$$

en remarquant que les limites de z seront zéro et $\frac{1}{e}$.

En faisant de même $x = z\sqrt{1-e}$ et intégrant entre les limites zéro et $\frac{1}{e}$ et trouvant que les limites de y

28. seront zero et l'unité par conséquent

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}} = \frac{\omega}{2} = a \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-e^2 z^2)}} = a \cdot \frac{\omega}{2}$$

On a donc

$$\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}$$

et

$$\frac{\omega}{2} = a \cdot \frac{\omega}{2}$$

d'où l'on tire :

$$285 \quad a = \sqrt{2n+1}$$

$$286 \quad \frac{\omega}{2} = \sqrt{2n+1}$$

L'équation différentielle deviendra donc :

$$287 \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}} = \frac{\sqrt{1-2n+1}}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2 x^2)}} \frac{dx}{2x}$$

Pour donner un exemple, considérons le cas où $n=1$ et $n=2$.

A. P. $n=1$ on aura :

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}} = \sqrt{3} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2 x^2)}}$$

$$y = \frac{\sqrt{1+e^2} \cdot x \cdot \varphi(\frac{\omega}{3}) - x^2}{1 + e^2 \varphi^2(\frac{\omega}{3}) \cdot x^2}$$

e est déterminé par l'équation :

$$1 = e^2 \left\{ \varphi\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2 - \frac{e^2}{1 + e^2}$$

$$On trouve $\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{3} - \frac{\omega}{3}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) \cdot \frac{f\left(\frac{\omega}{3}\right)}{f\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{\sqrt{1-\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}}{\sqrt{1+e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}}$$$

d'où :

$$1 = \frac{(1+e^2) \cdot (1+\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right))}{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{(e^2 - e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) - 1)}{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}$$

Maintenant on trouvera en combinant les deux équations

et remplaçant pour a sa valeur $\sqrt{3}$

$$\sqrt{3} = e \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) \text{ donc ; } \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{e} \text{ et par}$$

29

suite :

$$1 = \frac{e^2 - e\sqrt{3}}{1 + e\sqrt{3}}$$

de là

$$e^2 - 2\sqrt{3} \cdot e = 1$$

$$e = \sqrt{3} + 2$$

ayant trouvé e on aura $\varphi^2(\frac{\omega}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$

On aura donc l'équation différentielle :

$$288 \quad \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1+(2+\sqrt{3})^2 y^2)}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1+(2+\sqrt{3})^2 x^2)}}$$

qui est satisfaite par l'intégrale algébrique :

$$y = \sqrt{1-x} \cdot \frac{\sqrt{3} - (2+\sqrt{3}) \cdot x^2}{1 + \sqrt{3} \cdot (2+\sqrt{3}) \cdot x^2}$$

Si l'on ~~pose~~ $x \sqrt{2-\sqrt{3}}$ au lieu de x et

$y \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1-x}$ au lieu de y on obtiendra l'équation :

$$289 \quad \frac{\partial y}{\sqrt{1 - 2\sqrt{3} \cdot y^2 - y^4}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{1 + 2\sqrt{3} \cdot x^2 - x^4}}$$

qui est satisfaite par :

$$y = x \cdot \frac{\sqrt{3-x^2}}{1 + \sqrt{3} \cdot x^2}$$

B. si $n=2$ on aura l'équation différentielle

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2 y^2)}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2 x^2)}}$$

$$290 \quad y = \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\varphi^2(\frac{\omega}{3}) - x^2}{1 + e^2 \cdot \varphi^2(\frac{\omega}{3}) \cdot x^2} \cdot \frac{\varphi^2(\frac{2\omega}{3}) - x^2}{1 + e^2 \cdot \varphi^2(\frac{2\omega}{3}) \cdot x^2}$$

$$1 = e^3 \cdot \varphi^2(\frac{\omega}{10}) \cdot \varphi^2(\frac{3\omega}{10}) ; \quad \sqrt{3} = e^2 \cdot \varphi^2(\frac{\omega}{5}) \cdot \varphi^2(\frac{7\omega}{5})$$

$$\text{On a } \left. \begin{aligned} \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right) &= \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{5}\right) = \frac{f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)} \\ \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right) &= \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{5}\right) = \frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)} \\ \left(\frac{1+i\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{f^2\left(\frac{4\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{4\omega}{5}\right)} \end{aligned} \right\} 291$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5} + \frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5} + \frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{\omega}{5}\right) - \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{2\omega}{5}\right) F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{\omega}{5}\right) + e^2 \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{2\omega}{5}\right) f\left(\frac{\omega}{5}\right)}$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5} - \frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5} - \frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{\omega}{5}\right) + \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{2\omega}{5}\right) F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{\omega}{5}\right) - e^2 \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{\omega}{5}\right)}$$

en multipliant ces valeurs de $\frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)}$ et $\frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}$ entre elles, et remarquant que $f\left(\frac{3\omega}{5}\right) = f\left(\frac{2\omega}{5}\right)$; $F\left(\frac{3\omega}{5}\right) = F\left(\frac{2\omega}{5}\right)$ on obtiendra :

$$P = \frac{P^2 - \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{1 - e^4 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot P^2}$$

où l'on a fait pour abréger $P = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{\omega}{5}\right)}$

Cela posé les équations 290, 291. donneront

$$1 = e^3 \cdot P^2 ; \quad \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{e^2} \text{ donc}$$

en substituant :

$$\frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{\frac{1}{e^3} - \frac{\sqrt{5}}{e^2}}{1 - \frac{\sqrt{5}}{e}} = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1 - e\sqrt{5}}{e - \sqrt{5}}$$

de là

$$\sqrt{e} = \frac{1 - e\sqrt{5}}{e - \sqrt{5}}$$

$$e^3 - 1 - (5 + 2\sqrt{5})e(e-1) = 0$$

Les racines de cette équation sont $e = 1$

$$e = 2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}, \quad e = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

desquelles la dernière valeur

$$e = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)^2$$

appartient à la question; car l'équation

$$1 = e^3 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) \quad \text{nous montre que } e \text{ doit}$$

être plus grand que l'unité.

Connaissant e on trouve la valeur des quantités

$\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)$ comme il suit :

Nous avons

$$1 = e^3 \cdot \rho^2 = e^3 \cdot \frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}$$

or en faisant $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) = \alpha$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \beta$ on aura

$$f^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 - \alpha^2; \quad f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 - \beta^2$$

$$F^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 + e^2 \alpha^2; \quad F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 + e^2 \beta^2$$

donc :

$$(1 + e^2 \alpha^2)(1 + e^2 \beta^2) = e^3 (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)$$

$$1 + e^2(\alpha^2 + \beta^2) + e^4 \alpha^2 \beta^2 = e^3 - e^3(\alpha^2 + \beta^2) + e^3 \alpha^2 \beta^2$$

$$e^3 - 1 + e^3(e-1) \cdot \alpha^2 \beta^2 = e^2(e+1) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)$$

on nous avons trouvé plus haut $\alpha^2 \beta^2 = \frac{\sqrt{5}}{e^2}$

donc

$$e^3 - 1 - e^3(e-1) \sqrt{5} = e^2(e+1) \{\alpha^2 + \beta^2\}$$

On connaît donc $\alpha^2 \beta^2$ et $\alpha^2 + \beta^2$ et par suite α^2 et β^2 par la résolution d'une équation du second degré. On a donc aussi la valeur de y , qui satisfait à l'équation :

$$192. \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+(2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}})^2 \cdot y^2)}} = \sqrt{5} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+(2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}})^2 \cdot x^2)}} \quad 193.$$

Si l'on pose $\frac{x}{\sqrt{e}}$ au lieu de x et $\frac{y\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$ au lieu de y on obtiendra l'équation :

$$\frac{dy}{\sqrt{1-4\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot y^2 - y^4}} = \sqrt{5} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+4\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot x^2 - x^4}} \quad 193.$$

où

$$y = x \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot x^2 + x^4}{1 + \sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot x^2 + x^4}$$

dans ces deux cas que nous venons de considérer il n'a pas été difficile de trouver la valeur de la quantité e , mais pour une plus grande valeur de n on parviendrait à des équations algébriques qui probablement ne sont pas résolubles algébriquement. —

On peut néanmoins dans tous les cas exprimer la valeur de e par ~~series~~ des séries, et comme leur forme est très remarquable je vais les rapporter ici :

En faisant dans la formule 206 du VII^e § $\alpha = 1$ on aura en remarquant que $c = 1$; $\varphi(\frac{\omega}{2}) = \frac{1}{e}$

$$e\omega = 4\pi \left\{ \frac{\varphi^2}{\varphi^2+1} + \frac{\varphi^3}{\varphi^6+1} + \frac{\varphi^5}{\varphi^{10}+1} + \dots \right\}$$

$$\text{où } \varphi = b^{\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

En faisant de même dans la formule 204 $\alpha = \frac{\omega}{2}i$

$$\text{on aura } \varphi(\frac{\omega}{2}i) = \frac{i}{e} ; \quad \varepsilon = b^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

donc

$$\frac{i}{e} = \frac{2 \cdot \pi}{e} \cdot \left\{ \frac{i - \frac{1}{i}}{r + r^{-1}} + \frac{i^3 - i^{-3}}{r^3 + r^{-3}} + \dots \right\}$$

c'est-à-dire

$$w = 4\pi \cdot \left\{ \frac{r}{r^2 + 1} + \frac{r^3}{r^6 + 1} + \frac{r^5}{r^{10} + 1} + \dots \right\}$$

$$\text{où } r = \sqrt[2]{\frac{w}{\pi}}$$

maintenant dans le cas que nous considérons nous avons

$$\frac{w}{\omega} = \sqrt{2n+1} \quad \text{et par conséquent}$$

$$292 \quad \omega = 4\pi \sqrt{2n+1} \cdot \left\{ \frac{\sqrt[2]{\frac{\pi}{2} \sqrt{2n+1}}}{\sqrt[2]{\frac{\pi}{2} \sqrt{2n+1}} + 1} + \frac{\sqrt[2]{\frac{3\pi}{2} \sqrt{2n+1}}}{\sqrt[2]{\frac{3\pi}{2} \sqrt{2n+1}} + 1} + \dots \right\}$$

Cette formule donne la valeur de $\omega = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}$

On aura ensuite la valeur de e par la formule qui deviendra en substituant pour ω sa valeur

$$\sqrt[2]{\frac{w}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$293. \quad e = \frac{4\pi}{\omega} \cdot \left\{ \frac{\sqrt[2]{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}}}{\sqrt[2]{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + 1}} + \frac{\sqrt[2]{\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}}}{\sqrt[2]{\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + 1}} + \dots \right\}$$

$\sqrt[2]{2}$ est le nombre 2,7182818...

Fin

Addition au memoire précédent

Après avoir terminé ce memoire précédent sur les fonctions elliptiques, j'ai vu une note sur les mêmes fonctions par M. E. G. S. Jacobi inserée dans "Astronomische Nachrichten" N° 123, 1827 où il donne le théorème suivant

Soit p un nombre impair quelconque, θ' un tel angle qu'on ait en designant l'intégrale $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$ prise de 0 jusqu'à θ par $F(k, \theta)$

$$F(k, \theta') = \frac{1}{p} \cdot F(k, 90^\circ)$$

et en général $\theta^{(m)}$ un tel angle qu'on ait

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p} \cdot F(k, 90^\circ)$$

Poit déterminé encore l'angle ψ par l'équation

$$\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\psi) = \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta' + \theta)} \cdot \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta'' + \theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta'' - \theta)} \dots \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta^{(p-2)} + \theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta^{(p-2)} - \theta)} \cdot \tan(45^\circ \mp \frac{1}{2}\theta)$$

je dis qu'on aura :

$$F(k, \theta) = \mu \cdot F(\lambda, \psi)$$

On doit prendre le signe supérieur si p est de la forme $4n+1$ et l'inférieur si p est de la forme $4n-1$. On doit prendre ψ entre $\frac{m}{p}\pi$ et $\frac{m+1}{p}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$.

Les constantes μ et λ se déterminent de plusieurs différentes manières. On a par exemple :

$$\mu = \frac{1}{2(\operatorname{cosec} \theta' - \operatorname{cosec} \theta'' + \dots \mp \cos \theta^{(p-2)} \pm \frac{1}{2})}$$

$$\lambda = 2k\mu (\sin \theta' - \sin \theta'' + \dots \mp \sin \theta^{(p-2)} \pm \frac{1}{2})$$

Ce théorème élégant que M. Jacobi a donné sans démonstration est contenu comme cas particulier dans la formule 227 du memoire précédent et il est dans le fond le même que la formule 240.

Nous allons le démontrer ici. —

39

en faisant dans l'intégrale $\alpha' = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

$x = \sin \theta$ on aura

$$\alpha' = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

mais $\alpha' = \phi \alpha$ donc

$$\alpha' = F(k, \theta) \quad \text{donc} \quad \sin \theta = \phi \alpha.$$

Si $\theta = 90^\circ$ on a $\alpha' = 1$ donc

$$\frac{\omega}{2} = F(k, 90^\circ).$$

en faisant donc $\theta = \theta^{(m)}$ on aura

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p} \cdot \frac{\omega}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta^{(m)} = \phi\left(\frac{m}{p} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$$

Cela posé, faisons dans 269 et 270

$$e^2 = -\lambda^2, \quad e^2 = -k^2, \quad \mu = \frac{(-1)^n}{\alpha}$$

$$x = (-1)^n \sin \theta, \quad y = \sin \psi, \quad m+1 = p$$

il viendra :

$$(1) \quad \int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \pm \mu \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}} + C$$

où les quantités μ, λ, ψ sont déterminées par les équations :

$$\lambda = k^{2n+1} \left\{ \sin \theta', \sin \theta'', \dots, \sin \theta^{(n-1)} \right\}^2$$

$$\mu = \left\{ \frac{\sin \theta' \sin \theta'' \dots \sin \theta^{(n-1)}}{\sin \theta' \sin \theta'' \dots \sin \theta^{(n)}} \right\}^2$$

$$\sin \psi = \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sin \theta \frac{\{ \sin^2 \theta'' - \sin^2 \theta' \} \{ \sin^2 \theta''' - \sin^2 \theta'' \} \dots \{ \sin^2 \theta^{(n)} - \sin^2 \theta^{(n-1)} \}}{\{ 1 - k^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \theta'' \} \{ 1 - k^2 \sin^2 \theta'' \sin^2 \theta''' \} \dots \{ 1 - k^2 \sin^2 \theta^{(n-1)} \sin^2 \theta^{(n)} \}}$$

Nous supposons le moindre que l'unité dans le cas contraire ω sera une quantité imaginaire. —

Pola posé considérons les équations 2.2.9. en remarquant que
 $c_1 = c = 1$ on en tire

$$\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = \frac{z}{z_1} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

on

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\varphi(\frac{\omega}{2} + \alpha) - x}{\varphi(\frac{\omega}{2} + \alpha) + x} \cdot \frac{\varphi(\frac{\omega}{2} + 2\alpha) - x}{\varphi(\frac{\omega}{2} + 2\alpha) + x} \dots \frac{\varphi(\frac{\omega}{2} + n\alpha) - x}{\varphi(\frac{\omega}{2} + n\alpha) + x}$$

c'est-à-dire en faisant $\alpha = \frac{2m\alpha}{2n+1}$ et $m = -1$

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\varphi(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}) + x}{\varphi(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}) - x} \cdot \frac{\varphi(\frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}) - x}{\varphi(\frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}) + x} \dots \frac{(-1)^n \varphi(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}) - x}{(-1)^n \varphi(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}) + x}$$

maintenant on a $x = (-1)^n \sin \theta$ et $\varphi(\frac{m}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}) = \sin \theta^{(m)}$

donc en substituant

$$\sqrt{\frac{1-\sin \psi}{1+\sin \psi}} = \pm \sqrt{\frac{1-(-1)^n \sin \theta}{1+(-1)^n \sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta' - \sin \theta}{\sin \theta' + \sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta'' + \sin \theta}{\sin \theta'' - \sin \theta} \dots \frac{\sin \theta^{(2n-1)} + (-1)^n \sin \theta}{\sin \theta^{(2n-1)} - (-1)^n \sin \theta}}$$

et de là

$$\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\psi) = \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta' + \theta)} \cdot \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta'' + \theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta'' - \theta)} \dots \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta^{(2n-1)} + (-1)^n \theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta^{(2n-1)} - (-1)^n \theta)} \cdot \tan(45^\circ - (-1)^n \theta)$$

C'est précisément la formule de M. Jacobi.

Dans la formule (1) on peut toujours supposer le second membre positif. En effet en différentiant on aura

$$\pm d\psi = \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \cdot d\theta$$

En supposant θ toujours croissant le second membre sera toujours positif. En déterminant donc ψ de la sorte qu'elle soit croissante et décroissante en même temps que θ on doit prendre le signe supérieur. On a donc

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \mu \cdot \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}$$

ou bien

$$F(k, \theta) = \mu \cdot F(k, \psi)$$

37.
 De la remarque que ψ doit être croissant et décroissant
 tant ~~en même~~ avec θ , et en ayant égard à la formule
 on tirera aisément la conséquence que ψ doit tomber
 entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$ si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et
 $\theta^{(m+1)}$.

Quant aux quantités λ et μ , il est évident qu'elles
 ont nécessairement les mêmes valeurs, que celles de
 M. Jacobi. Les expressions que j'ai données sont
 plus commodes pour l'application, et montrent
 clairement que λ est extrêmement petit si h
 un peu grand. — Au reste on peut sans difficulté
 démontrer l'exactitude à l'aide de la formule 757.

Fin

$$\frac{\psi}{\sin^2 \lambda - 1} = \frac{\psi}{\sin^2 \lambda - 1}$$

$$(\psi, \lambda) = (\lambda, \psi)$$