LA MEMORIA PARIGINA DI ABEL
E LA SUA IMPORTANZA PER LA GEOMETRIA

ANDREA DEL CENTINA

1. La memoria parigina.

Nel settembre del 1825 Niels Henrik Abel [1802-1829] iniziò il suo viaggio scientifico in Europa. Egli fu a Berlino per circa sei mesi, poi si recò a Dresda e a Praga. In aprile fu a Vienna per sei settimane, quindi attraversò il nord d'Italia e passò in Svizzera. Da Zurigo raggiunse finalmente Parigi: centro di tutte le sue ambizioni di matematico. Abel vi giunse il 10 luglio 1826 e subito iniziò la redazione del lavoro al quale stava pensando da tempo. Il 24 ottobre Abel scrisse al suo maestro ed amico Holmboe: "Ho appena finito di scrivere una grossa memoria su una certa classe di funzioni trascendenti. Oso dire, senza vantarmi, che è un buon lavoro. Sono curioso di sentire l'opinione dell'Istituto". Il 30 dello stesso mese, Abel presentò personalmente all'Accademia di Parigi il suo lavoro: *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*, che diverrà noto come la "memoria parigina".

"Le funzioni trascendenti considerate fino ad oggi dai geometri" scrisse Abel nell'introduzione [A, I, p. 145], "sono un piccolissimo numero. Quasi tutta la teoria delle funzioni trascendenti si riduce a quella delle funzioni logaritmiche, esponenziali e circolari [trigonometriche], funzioni che, in fondo, formano una sola specie. Soltanto negli ultimi tempi si è iniziato a considerare altre funzioni. Tra queste, le trascendenti ellittiche". Abel, come scrisse ancora nell'introduzione, fu indotto a considerare una classe molto estesa di funzioni: quella le cui derivate sono espresse per mezzo di equazioni algebriche, ossia funzioni del tipo

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} R(x, y(x))dx \tag{1.1}$$

dove R è una funzione razionale degli argomenti e $y(x)$ una *funzione algebrica* di x, cioè una funzione definita implicitamente da una equazione polinomiale $\chi(x, y) = 0$ (v. oltre).

"Una funzione la cui derivata è razionale, come ben si sa" aggiunse Abel, introducendo il risultato principale della sua memoria, "ha la proprietà che si può esprimere la somma di un numero qualunque di tali funzioni mediante una funzione algebrica e logaritmica... Analogamente si può esprimere la somma di un qualunque numero di funzioni ellittiche, ossia di funzioni che non contengono altre irrazionalità che radicali quadratici sotto i quali la variabile non ha grado superiore al quarto, mediante una funzione algebrico-logaritmica, purchè si stabilisca tra le variabili una certa relazione algebrica".

È questa analogia tra i vari tipi di funzioni trascendenti che condusse Abel a cercare se proprietà analoghe non potessero valere per funzioni più generali e pervenne al teorema seguente:

($*$) *Se si hanno più funzioni le cui derivate possono essere radici d'una stessa equazione algebrica, i cui coefficienti sono funzioni razionali d'una stessa variabile, si può sempre esprimere la somma di un numero qualunque di tali funzioni mediante una funzione algebrico-logaritmica, purchè si stabilisca tra le variabili delle funzioni in questione un certo numero di relazioni algebriche.*"

A questo punto occorre precisare come Abel intendesse gli integrali (1.1). Senza dubbio egli considerò x come "variabile complessa" e, nonostante che all'epoca A. Cauchy avesse appena iniziato a sviluppare la sua teoria degli integrali di funzioni di una variabile complessa, il contesto mostra che Abel intendesse $u(x)$ come l'integrale di $R(x, y(x))$ eseguito lungo un cammino nel piano complesso tra x_0 e x, quando $y(x)$, selezionata tra le radici $y_1(x), ..., y_n(x)$ di $\chi(x, y) = 0$, si intende "prolungata in modo continuo" lungo tale cammino. Chiaramente potendosi le $y_1(x), ..., y_n(x)$ scambiare tra loro per prolungamento, le funzioni $u(x)$ risultano funzioni a più valori. Questo approccio è confermato dal suo lavoro sulle "funzioni ellittiche" di poco posteriore (v. oltre).

L'integrale (1.1) deve dunque essere inteso come l'integrale di una 1-forma differenziale lungo un cammino tra due punti $(x_0, y(x_0))$ e $(x, y(x))$ sulla curva C di equazione $\chi(x, y) = 0$. Il polinomio $\chi(x, y)$ può non essere irriducibile, ma si supporrà privo di fattori multipli. Così la curva algebrica C potrà avere più componenti, ma nessuna multipla, e singolarità arbitrarie.

Tutto ciò può essere spiegato in modo più soddisfacente usando la nozione di superficie di Riemann, ma eviteremo di farlo volendo, almeno per il momento, mantenerci nei "panni" di Abel.

Il teorema ($*$) significa dunque che se $\mathfrak{G}_{\underline{a}} = \{\theta(x, y; \underline{a}) = 0\}$ è una famiglia di curve algebriche dipendente razionalmente da certi parametri $\underline{a} = \{a, a', a''...\}$, e $P_i(\underline{a}) = (x_i(\underline{a}), y_i(\underline{a})), i = 1, ..., m \leq \deg C \cdot \deg G_{\underline{a}}$, $G_{\underline{a}} \in \mathfrak{G}_{\underline{a}}$, sono i punti di intersezione di C con $G_{\underline{a}}$ variabili con $\underline{a}$, allora

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{P_0}^{P_i(\underline{a})} R(x, y(x))dx = V(\underline{a}) + \sum A_j \log W_j(\underline{a})$$

dove V e le W_j sono funzioni razionali delle $\underline{a}$ e le A_j sono delle costanti.

"Il numero di queste relazioni" aggiunse Abel nell'introduzione, riferendosi all'enunciato ($*$), "non dipende dal numero delle funzioni, ma soltanto dalla natura delle funzioni particolari che consideriamo. Così, per esempio, per una funzione ellittica questo numero è 1, per una funzione la cui derivata non contiene altre irrazionalità che la radice quadrata di un polinomio di grado 5 o 6, il numero delle relazioni necessarie è 2, e così di seguito... se ne deduce il seguente teorema:

($**$) *Si può sempre esprimere la somma di un numero dato di tali funzioni, le cui variabili sono arbitrarie, mediante una somma di un numero determinato di funzioni simili, le cui variabili sono funzioni algebriche delle variabili precedenti*".

Dunque con i teoremi ($*$) e ($**$) Abel, non solo aveva esteso il "teorema di addizione" di L. Euler per le trascendenti ellittiche (v. oltre) al caso generalissimo delle trascendenti (1.1), ma anche era vicino alla nozione di "genere" per la curva algebrica C (v. oltre).

A. M. Legendre e A. Cauchy furono incaricati di giudicare la memoria di Abel. Legendre aveva appena pubblicato il primo volume del suo *Traité des fonctions élliptiques et des integrales eulériennes* ed il secondo volume era in corso di stampa. Per la sua lunga esperienza nel campo delle trascendenti ellittiche egli sarebbe stato in grado, più di ogni altro, di apprezzare i risultati di Abel, ma Legendre passò il manoscritto a Cauchy. Quest'ultimo era in quel tempo il matematico più attivo a Parigi, ma troppo impegnato nelle proprie ricerche per prestare attenzione a quelle altrui. Così il manoscritto di Abel rimase a prender polvere sulla scrivania di Cauchy. In dicembre Abel lasciò Parigi ed iniziò il suo viaggio di ritorno verso la Norvegia. Egli non ebbe mai risposta dall'Accademia nel tempo che gli restò da vivere. L'anno seguente scoppiò in Francia la rivoluzione e Cauchy andò in esilio volontario, prima a Torino e poi a Praga; così il manoscritto di Abel rimase nascosto e sempre più dimenticato.

Soltanto nel 1840, a seguito di formali richieste del Governo Norvegese, il manoscritto di Abel fu cercato, ritrovato tra le carte di Cauchy ed infine pubblicato nel 1841.

2. Le trascendenti ellittiche e il teorema di addizione di Euler.

Per comprendere meglio le motivazioni delle ricerche di Abel sulle funzioni trascendenti, l'enunciato stesso dei due teoremi $(*)$ e $(**)$ e la dimostrazione che egli dette del primo, è utile ripercorrere brevemente la storia di queste funzioni; questo è lo scopo dei due prossimi paragrafi.

Integrali del tipo

$$u(x) = \int \frac{p(x)dx}{\sqrt{P(x)}} \ , \tag{2.1}$$

dove $p(x)$ e $P(x)$ sono polinomi e $P(x)$ di grado $n \geq 2$, si presentarono nello studio di problemi di meccanica e nella determinazione della lunghezza degli archi di curve piane già a partire dall'ultimo ventennio del XVII secolo. Il calcolo di questi integrali nel caso in cui $P(x)$ ha grado 2, non presentò difficoltà: subito si riconobbe che, se $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), x_1 \neq x_2$, la sostistuzione

$$x = \frac{x_2 t^2 - x_1}{t^2 - 1}$$

riduceva il calcolo dell'integrale dato a quello dell'integrale di una funzione razionale $r(t)$, e dunque risultava sempre esprimibile mediante una funzione razionale e logaritmica.

Il caso in cui $n \geq 3$ presentò invece difficoltà. I primi integrali ad essere considerati furono quelli del tipo

$$\int \frac{p(x)dx}{\sqrt{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_4}} \ , \tag{2.2}$$

dove $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_4$ ha radici distinte (se $a_0 = 0$ si suppone $a_1 \neq 0$).

Tra questi integrali compare l'integrale

$$\int_0^{x_1} \frac{(a^2 + \alpha^2 x^2)}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 + \alpha^2 x^2)}} dx \ ,$$

che esprime la lunghezza di un arco dell'ellisse $x^2 a^{-2} + y^2 b^{-2} = 1$ (qui $b > a$ e si è posto $\alpha^2 = (b^2 - a^2)/a^2$); per questa ragione gli integrali (2.2) furono poi detti *integrali ellittici.*

Per molto tempo si cercò di esprimere gli integrali (2.2) mediante le funzioni "elementari", ossia le funzioni razionali, trigonometriche, esponenziali e logaritmiche, poi i matematici dell'epoca si convinsero che questi integrali esprimevano funzioni trascendenti del tutto nuove.

Le questioni delle quali si occupò Abel ebbero origine dalle ricerche di G. Fagnano sugli archi di lemniscata, ossia della curva definita dall'equazione

$$(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$$

Posto $r^2 = x^2 + y^2$ la lunghezza dell'arco di questa curva è data dall'integrale

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$$

e Fagnano [F, II, p. 305-313] dimostrò che

$$2\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} \ ,$$

quando

$$r_2 = \frac{2r_1\sqrt{1-r_1^4}}{1+r_1^4}$$

Questa formula, che esprime la duplicazione dell'arco di lemniscata, attirò, nel 1756, l'attenzione di L. Euler, ed infatti questa gli suggerì la forma

$$x^2 + y^2 + (cxy)^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4} \ ,$$

(dove dove c è una costante arbitraria) per l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \tag{2.3}$$

Da qui Euler fu in grado di provare il "teorema di addizione" per gli archi di lemniscata [E, I, 20, p. 58-79], ossia di provare che

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{2.4}$$

quando

$$x_3 = \frac{x_1\sqrt{1-x_2^4} + x_2\sqrt{1-x_1^4}}{1+x_2^2x_1^2}$$

(per $x_1, x_2 > 0$ molto vicini a zero).

Se $x_2 = x_1$ la (2.4) coincide con la formula di duplicazione di Fagnano e si osservi inoltre che la (2.4) estende agli archi di lemniscata il "teorema di addizione" per gli archi circolari

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

dove $x_3 = x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$ (per $x_1, x_2 > 0$ molto vicini a zero), che si ottiene facilmente dalla formula di addizione per la funzione seno

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \ ,$$

posto $x_1 = \sin u$, $x_2 = \sin v$ e $x_3 = \sin(u+v)$.

Euler non pervenne all'integrale generale dell'equazione differenziale (2.3) attraverso l'applicazione di un metodo, ma piuttosto, come lui scrisse, "potius tentando, vel divinando".

Questo risultato fu poi esteso da Euler ad integrali via via più generali, per giungere nel 1775 [E, I, 21 p.1-38] al "teorema di addizione" per gli integrali del tipo

$$\int \frac{R(x)dx}{\sqrt{P(x)}} ,$$

dove $R(x)$ è una funzione razionale (pari) e $P(x)$ è un polinomio qualsiasi di quarto grado a radici distinte. Precisamente egli ottenne che

$$\int_0^{x_1} \frac{R(x)dx}{\sqrt{P(x)}} + \int_0^{x_2} \frac{R(x)dx}{\sqrt{P(x)}} = \int_0^{x_3} \frac{R(x)dx}{\sqrt{P(x)}} + v , \tag{2.5}$$

dove x_3 è una funzione algebrica di x_1 e x_2 e v è una funzione algebrico-logaritmica di x_1 e x_2. Ma anche questo risultato fu ottenuto in modo "fortuito" senza seguire un metodo preciso.

Euler tentò poi, ma senza successo, di estendere la formula precedente ad integrali del tipo (2.1) con $P(x)$ di grado $n \geq 5$, ossia agli integrali che poi furono detti *iperellittici.*

3. Le funzioni trascendenti da Legendre ad Abel.

La forma più generale degli integrali ellittici venne introdotta nel 1784 da G. Lagrange nella memoria *Sur un nouvelle méthode de calcul intégral ect.* [L, II p. 253-312], questi sono gli integrali

$$\int R(x,y)dx \tag{3.1}$$

dove $R(x,y)$ è una funzione razionale degli argomenti e x, y sono legati dall'equazione $y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$ dove il secondo membro è un polinomio a radici distinte (senza escludere la possibilità che sia $a_0 = 0$, nel qual caso $a_1 \neq 0$), In questa memoria Lagrange mostrò che tali integrali si possono sempre ridurre ad una somma di funzioni elementari e di un integrale del tipo

$$\int \frac{N(x)dx}{\sqrt{(1 \pm p^2x^2)(1 \pm q^2x^2)}}$$

dove $N(x)$ è una funzione razionale di x^2, p e q reali, con $p > q$.

A.M. Legendre si interessò agli integrali elittici a partire dal 1786. La sua memoria più importante in questo campo è *Mémoire sur les trascendantes elliptiques,* che presentò all'Accademia di Parigi nel 1793 [Le]. In questa memoria Legendre si propose di confrontare tra loro tutte le trascendenti ellittiche, di classificarle in differenti specie riducendole alla forma più semplice possibile, di determinare il metodo più facile e rapido per il loro calcolo approssimato: in definitiva di sviluppare una vera teoria. Dal nostro punto di vista, il risultato principale di questa memoria si può riassumere come segue: *ogni integrale* (3.1) *è sempre riconducile all'integrale di una funzione razionale più una somma di integrali dei seguenti tre tipi*:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} ,$$

$$\int \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx ,$$

$$\int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\ ,$$

(k una costante, $0 \leq k \leq 1$) che chiamò rispettivamente di *prima*, *seconda* e *terza specie*.

D'allora Legendre non cessò mai di ritornare, di tanto in tanto, allo studio delle nuove trascendenti, facendone il suo tema di ricerca prediletto. Tra il 1811 e il 1817 pubblicò i tre volumi degli *Exercises de calcul intégral*, che poi furono perfezionati nella sua opera maggiore il *Traité des fonctions élliptiques et des integrales eulériennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numerique*, che pubblicò in tre volumi a partire dal 1825. Poichè gli integrali sono funzioni del secondo estremo d'integrazione, Legendre chiamò questi integrali "funzioni ellittiche".

Oggi, come ben noto, si riserba questo nome alla funzioni meromorfe di una variabile complessa doppiamente periodiche, tra le quali vi sono le funzioni che si ottengono "invertendo" gli integrali ellittici di prima specie (v. oltre)

Negli anni di studio all'Università di Christiania, Abel lesse le opere di Euler, di Legendre ed anche le *Disquisitione aritmeticae* di C.F. Gauss, dove, è bene notarlo per il seguito, nell'introduzione al Capitolo 7, Gauss alluse ad una vasta classe di funzioni trascendenti comprendente non solo seno, coseno ecc., ma anche, "per esempio, quelle che dipendono dall'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$".

La "filosofia" che Abel seguì sempre nelle sue ricerche è espressa in modo netto nell'introduzione di *Sur la resolution algébrique des équations*. "Invece di cercare una relazione" scrisse Abel, "della quale non sappiamo l'esistenza, occorre chiedere se una tale relazione è in effetti possibile. Per esempio nel calcolo integrale, invece di cercare, con l'aiuto di tentativi o divinazioni, d'integrare le forme differenziali [e qui sembra di scorgere un'allusione ad Euler], bisogna piuttosto cercare se è possibile integrarle in una tale maniera o in un'altra,... ciò che ha reso poco utilizzato nelle matematiche questo modo di procedere, ma che è senza dubbio l'unico scientifico, perchè è il solo che sappiamo possa condurre allo scopo fissato, è l'estrema complicazione alla quale sembra soggetto, ... ma in molti casi questa complicazione non è che apparente,... è soprattutto nel calcolo integrale che questo metodo è facile da applicare" [A, II p.217].

Niente può dar meglio l'idea della superiore genialità di Abel, della chiarezza pienamente cosciente con la quale espone questi principi generali. Questa è la linea di pensiero costantemente confermata nelle sue opere, e questo modo di procedere gli permetterà di superare le difficoltà incontrate da Euler e da Legendre nell'estendere il "teorema di addizione" oltre il caso ellittico.

Così Abel non esitò a considerare, anche influenzato (probabilmente) dall'osservazione di Gauss, la classe "très etendue" delle trascendenti (1.1) ed a studiarle con la massima generalità.

È forse utile a questo punto una breve digressione sugli integrali (1.1) e le funzioni che definiscono. In termini moderni (v. ad esempio [S] o [M]), al posto di C possiamo considerare la superficie di Riemann compatta X ("desingolarizzazione" della chiusura $\overline{C}$ di C in $\mathbb{P}^2$). Allora gli integrali (1.1) sono integrali di 1-forme differenziali meromorfe η su X, ossia 1-forme differenziali localmente del tipo $\eta = g(x)dx$ con $g(x)$ funzione meromorfa in un piccolo disco di centro 0, eseguiti lungo un qualsiasi cammino su X, tra un punto iniziale P_0 e un punto finale P, che non passa per nessuna singolarità di η. Oggi questi integrali sono detti *integrali abeliani* e le 1-forme differenziali meromorfe η sono dette *differenziali abeliani*. Le funzioni

$u(x)$ sono funzioni a più valori: la loro polidromia è frutto delle singolarità delle $g(x)$ e dell'esistenza di cammini chiusi "non omologhi a zero" su X, che dànno luogo a "periodi". Allora la funzione $u(x)$ va considerata "modulo periodi".

I differenziali abeliani si classificano (dopo Riemann [R, p.112-114]) secondo le loro singolarità: un differenziale abeliano si dirà di *prima specie* o *differenziale olomorfo*, se è privo di singolarità, di *seconda specie* se è dotato di singolarità polari ma a residuo nullo (ossia, in ogni rappresentazione locale $g(x)dx$ la $g(x)$ ha residuo nullo nell'origine), di *terza specie* in generale. Gli integrali abeliani sono detti di *prima*, *seconda* o *terza specie* (mantenendo la nomenclatura di Legendre) secondo il tipo di integrando, in particolare un integrale abeliano di prima specie sarà olomorfo nell'intorno di ciascun punto di X ed uno di seconda specie sarà privo di singolarità logaritmiche.

4. La dimostrazione di Abel del teorema di addizione.

La dimostrazione proposta da Abel del teorema $(*)$ è molto semplice, e per questo assolutamente geniale. Nella sostanza essa discende da due fatti elementari: 1) ogni funzione razionale simmetrica delle radici di una funzione algebrica è una funzione razionale dei suoi coefficienti; 2) l'integrale di una funzione razionale è somma di una funzione razionale e di un numero finito di logaritmi di funzioni razionali. "Sotto questa forma" scrisse Émile Picard, "il teorema sembra del tutto elementare, e forse non ci sono, nella storia della Scienza, delle proposizioni così importanti ottenute per mezzo di considerazioni così semplici" [P, II p. 364].

Qui è riportata, quasi alla lettera e con le stesse notazioni, la dimostrazione di Abel (v. anche [P, II, p. 364-367]).

Sia
$$0 = p_0 + p_1 y + ... + p_{n-1} y^{n-1} + y^n = \chi(y)$$
una equazione algebrica qualunque, dove tutti i coefficienti sono funzioni polinomiali della variabile x. Supponiamo $\chi(y)$ privo di fattori multipli. Allora per ogni valore fissato di x, l'equazione precedente fornisce n valori y che denoteremo $y', y'', ..., y^{(n)}$. Sia
$$\theta(y) = q_0 + q_1 y + ... + q_{n-1} y^{n-1}$$
un polinomio in x, y i cui coefficienti $q_0, ..., q_{n-1}$ sono polinomi di x, e supponiamo che un certo numero di coefficienti delle diverse potenze in x possano variare liberamente [parametri]: siano questi $a, a', a'', ...$ Come noto dalla teoria delle equazioni algebriche, il prodotto $\Theta = \theta(y') \cdot \theta(y'') \cdot ... \cdot \theta(y^{(n)})$ è una funzione razionale intera di x e delle $a, a', a'', ...$ Supponiamo che $\Theta = F_0(x)F(x)$ dove $F_0(x)$ è indipendente dalle $a, a', a'', ...$ Siano $x_1, ..., x_m$ le radici dell'equazione $F(x) = 0$, denotiamo x una qualsiasi di loro. La condizione $F(x) = 0$ implica $\Theta = 0$ e dunque una equazione della forma $\theta(y) = 0$. Poniamo in quest'ultima al posto di x le $x_1, ..., x_m$ successivamente e denotiamo $y_1, ..., y_m$ i corrispondenti valori di y che si ottengono, avremo le m equazioni corrispondenti $\theta(y_1) = 0, ..., \theta(y_m) = 0$. Sia ora $R(x, y)$ una qualsiasi funzione razionale di x, y e poniamo
$$dv = R(x_1, y_1)dx_1 + ... + R(x_m, y_m)dx_m$$

Il differenziale dv è una funzione razionale delle $a, a', a'', ...$ Infatti, combinando le equazioni $\theta(y) = 0$ e $\chi(y) = 0$, possiamo ricavare il valore di y espresso come funzione razionale di x e delle $a, a', a'', ...$ Sia ρ questa funzione, avremo allora $y = \rho$ e $R(x, y) = R(x, \rho)$. Differenziando l'equazione $F(x) = 0$ otteniamo $F'(x)dx +$

$\delta F(x) = 0$, dove $F'(x)$ è la derivata di $F(x)$ rispetto a x e $\delta F(x)$ denota il differenziale di F rispetto alle $a, a', a'', \ldots$ Si ha

$$dx = -\frac{\delta F(x)}{F'(x)}$$

e dunque

$$R(x,y)dx = -\frac{R(x,\rho)}{F'(x)}\delta F(x) = \varphi(x) \ ,$$

è chiaro che $\varphi(x)$ è una funzione razionale di x e delle $a, a', a'', \ldots$ Abbiamo allora

$$dv = \varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_m) \ ,$$

il secondo membro è una funzione razionale delle $a, a', a'', \ldots$ e delle $x_1, \ldots, x_m$, totalmente simmetrica rispetto alle ultime, dunque si può esprimere come funzione razionale delle $a, a', a'', \ldots$ e dei coefficienti dell'equazione $F(x) = 0$. Poichè questi ultimi sono essi stessi funzioni razionali delle $a, a', a'', \ldots$ ne segue che dv è una funzione razionale delle $a, a', a'', \ldots$ Allora, posto

$$\psi_i(x_i) = \int R(x_i, y_i)dx_i \ ,$$

si ha che

$$v = \psi_1(x_1) + \ldots + \psi_m(x_m) \tag{4.1}$$

è una funzione algebrico-logaritmica delle $a, a', a'', \ldots$ e Abel conclude: "Voilà la propriété générale des fonctions que nous avons énoncée au commencement de ce mémoire".

Questa dimostrazione mostra chiaramente come gli studi compiuti in precedenza da Abel nel campo sulle equazioni algebriche, gli siano stati di aiuto nelle ricerche sulle funzioni trascendenti.

Si osservi che il teorema resta valido qualunque sia la forma di $R(x,y)dx$ purchè x, y soddisfino la stessa equazione $\chi(y) = \chi(x,y) = 0$.

Nel proseguo della memoria, Abel dimostrò che l'integrale

$$\int R(x,y)dx \ ,$$

tranne nel caso in cui sia esprimibile direttamente mediante funzioni elementari, può essere ridotto alla forma

$$\int \frac{p_1(x,y)}{p(x)\chi_y}dx \ ,$$

dove $p_1(x,y) = t_0 + t_1 y + \ldots + t_{n-1}y^{n-1}, t_i$ polinomi in x, $p(x)$ polinomio in x e $\chi_y = d\chi(y)/dy$. Questa riduzione consentì ad Abel, attraverso calcoli molto complicati, di ottenere per v una epressione esplicita, e quindi di determinare i differenziali $R(x,y)dx$ per i quali v si riduce ad una costante. Abel trovò che questi devono avere necessariamente la forma

$$R(x,y)dx = \frac{t_0 + t_1 y + \ldots + t_{n-\beta'-1}y^{n-\beta'-1}}{\chi_y}dx \tag{4.2}$$

dove $\beta' \geq 1$.

D'altra parte è chiaro che se gli integrali considerati sono integrali di prima specie, v si ridurrà sempre ad una costante: infatti essi sono olomorfi sulla superficie di Riemann X e quindi una loro somma dovrà rimanere finita per ogni valore dei parametri $\underline{a}$, ma ciò può accadere solo se $v =$ costante.

Nella stessa memoria, come abbiamo detto all'inizio, Abel dimostrò poi che la somma di un qualsivoglia numero di funzioni (1.1) si può sempre esprimere per una somma di un numero determinato di tali funzioni più una espressione algebrico-logaritmica. Diamo un'idea della linea seguita da Abel per giungere al teorema (∗∗).

Le $x_1, ..., x_m$, tramite la $F(x) = 0$, sono definite in funzione delle $a, a', a'', ...$ Sia

$$x_1 = f_1(a, a', a'', ..), ..., x_m = f_m(a, a', a'', ...) \ .$$

Se denotiamo r il numero delle $a, a', a'', ...$ possiamo ottenere da queste equazioni i valori di $a, a', a'', ...$ in funzione di r valori tra gli $x_1, ..., x_m$. Possiamo supporre che questi siano $x_1, ..., x_r$. Sostituendo i valori di $a, a', a'', ...$ così ottenuti nelle espressioni di $x_{r+1}, ..., x_m$, quest'ultime divengono funzioni di $x_1, ..., x_r$. La formula generale (4.1) diviene allora

$$v = \psi_1(x_1) + ... + \psi_r(x_r) + \psi_{r+1}(x_{r+1}) + ... + \psi_m(x_m) \tag{4.3}$$

dove $x_1, ..., x_r$ sono quantità qualsiasi, $x_{r+1}, ..., x_m$ sono funzioni algebriche delle precedenti e v una funzione algebrico-logaritmica delle medesime quantità. La (4.3) si può porre nella forma

$$\psi_1(x_1) + ... + \psi_r(x_r) = v - (\psi_{r+1}(x_{r+1}) + ... + \psi_m(x_m))$$

(nel caso della formula (2.5) di Euler si ha $m - r = 1$). A questo punto Abel scrisse: "In questa formula il numero delle funzioni $\psi_{r+1}(x_{r+1}), ..., \psi_m(x_m)$ è molto importante e, in quanto segue, cercheremo il valore minimo che questo numero $m-r$ può assumere" [A, I p.172]. Abel riuscì nel suo intento (p.180) al prezzo di calcoli estremamente complicati. Egli dette poi qualche esempio di applicazione della sua teoria, ad esempio, nel paragrafo 10, considerò il caso in cui $\chi(y) = y^n - p_0$ dove p_0 è un polinomio in x. In particolare, quando $n = 2$ e p_0 è irriducibile di grado $2q$ o $2q-1$ (oggi noto come caso *iperellittico*), egli ottenne che $m - r = q - 1$ e questo, come oggi sappiamo, è il *genere* della curva iperellittica C definita da $y^2 - p_0 = 0$.

5. Teorema di Abel ed equivalenza razionale.

Usiamo la notazione già introdotta nei paragrafi precedenti. Siano G, G' due curve della famiglia $\mathfrak{G}_{\underline{a}}$ definite rispettivamente dalle equazioni $\theta = 0$ e $\theta' = 0$. Supponiamo che ogni curva $G_t = \alpha G + \beta G'$, con $t = (\alpha, \beta) \in \mathbb{P}^1$, definita dall'equazione $\alpha\theta + \beta\theta' = 0$, intersechi C in m punti variabili. Allora resta definita una mappa olomorfa $\digamma : \mathbb{P}^1 \to X^{(m)}$, tra $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{C}_\infty$ (sfera di Riemann) e l'*m-simo prodotto simmetrico* di X, ossia

$$X^{(m)} = \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \ /\mathfrak{S}_m$$

dove $\mathfrak{S}_m$ è il gruppo delle permutazioni su m elementi. Ogni punto D di $X^{(m)}$ è una m-upla non ordinata $P_1, ..., P_m$ di punti su X, usualmente si scrive $D = P_1 + ... + P_m$ e D è detto un *divisore* (effettivo) di grado m su X. Possiamo assumere che i divisori definiti rispettivamente da G, G' su C (dunque su X) siano $\digamma(0) = P_1 + ... + P_m$ e $\digamma(\infty) = P'_1 + ... + P'_m$. Allora se $P_i = (x_i, y_i)$, $P'_i = (x'_i, y'_i)$ e $R(x, y(x))dx$ è un differenziale olomorfo, per il teorema di Abel si ha

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{x_0}^{x_i} R(x_i, y_i)dx_i = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_0}^{x'_i} R(x'_i, y'_i)dx'_i = \text{cost} \ ,$$

ossia (nel linguaggio delle superficie di Riemann)

$$\int_{P_1}^{P_1'} \omega + ... + \int_{P_m}^{P_m'} \omega = 0$$

per ogni differenziale olomorfo ω su X.

Due divisori D, D' di grado m su X sono detti *razionalmente equivalenti* se esiste una funzione meromorfa μ su X (non identicamente nulla) tale che $\mu^{-1}(0) = D$ e $\mu^{-1}(\infty) = D'$ (ricordiamo che μ dà una mappa olomorfa $\mu : X \to \mathbb{P}^1$), ossia se D e D' sono rispettivamente il *divisore degli zeri* e il *divisore dei poli* di μ.

Oggigiorno quando ci si riferisce al teorema di Abel si intende comunemente il seguente teorema:

($\star$) *Condizione necessaria e sufficiente, affichè due divisori* $D = P_1 + ... + P_m$ *e* $D' = P_1' + ... + P_m'$ *su* X *siano razionalmente equivalenti, è che*

$$\int_{P_1}^{P_1'} \omega + ... + \int_{P_m}^{P_m'} \omega = 0$$

per ogni differenziale olomorfo ω *su* X.

La connessione col teorema ($*$) viene stabilita dal fatto che: dare una funzione meromorfa μ di grado m su X è equivalente a dare una mappa olomorfa $F : \mathbb{P}^1 \to X^{(m)}$, infatti possiamo prendere $F(t) = \mu^{-1}(t)$.

Dunque il teorema ($*$) (nel caso di differenziali olomorfi) implica che la condizione del teorema ($\star$) è necessaria. È tuttavia bene osservare che nell'enunciato ($\star$) viene persa una parte importante del teorema di addizione di Abel. Di ciò parleremo nel prossimo paragrafo, ma a questo fine cogliamo l'occasione per introdurre fin d'ora la nozione di "traccia" di un differenziale e di "equazione differenziale di Abel".

Sia $P_1(t)+...+P_m(t)$, con $P_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$, il divisore definito dall'intersezione di C con G_t e sia $\eta = R(x, y)dx$ un differenziale abeliano. Consideriamo la somma

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_0}^{x_i(t)} R(x_i(t), y_i(t))dx_i \ ,$$

differenziando rispetto a t otteniamo

$$du(t) = (\sum_{i=1}^{m} R(x_i(t), y_i(t))\frac{dx_i}{dt})dt \ ,$$

e questo differenziale definisce una 1-forma differenziale su $\mathbb{P}^1$.

Denotiamo $\mathrm{Tr}(\omega)$ il differenziale abeliano su $X^{(m)}$ il cui valore nel punto $D = P_1 + ... + P_m$ è

$$\mathrm{Tr}(\eta)(D) = \eta(P_1) + ... + \eta(P_m)$$

$\mathrm{Tr}(\eta)$ è detto la *traccia* di η e $F^*(\mathrm{Tr}(\eta))$ (è un differenziale abeliano su $\mathbb{P}^1$) è detto *traccia di* η *rispetto alla famiglia di divisori.* Poniamo $\mathrm{Tr}_F(\eta) = F^*(\mathrm{Tr}(\eta))$. È chiaro che

$$\mathrm{Tr}_F(\eta) = \sum_{i=1}^{m} R(x_i(t), y_i(t))\frac{dx_i}{dt})dt \ ,$$

e se η è un differenziale olomorfo allora il teorema di addizione di Abel è equivalente alla condizione

$$\mathrm{Tr}_F(\eta) \equiv 0$$

che è detta *equazione differenziale di Abel* (nella forma classica, v. [GG]).

6. L'eredità di Abel alla Geometria Algebrica.

La prima idea di Abel, come abbiamo visto, fu quella di esprimere in termini elementari una somma di integrali abeliani, indipendentemente dalla complessità degli integrali stessi. La sua seconda idea fu quella di "invertire" l'integrale ellittico di prima specie.

Tra la fine del 1827 e l'inizio del 1828, Abel pubblicò sulla rivista di L. Crelle, il *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, la famosa memoria sulle funzioni ellittiche *Recherches sur les fonction elliptique* [A, I p. 263-388]; questo lavoro ricevette ammirazione in tutta Europa e collocò Abel tra i più grandi matematici. Egli scrisse l'integrale ellittico di prima specie nella forma

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \ ,$$

dove c ed e sono costanti reali, $0 \le x \le 1/c$, considerò la funzione inversa $x = \varphi(\alpha)$ (come $x = \sin u$ è l'inversa di $u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$), e la estese all'intero campo complesso per mezzo di ripetute applicazioni del teorema di addizione. Abel ottenne una funzione meromorfa $\varphi(z)$, che dimostrò essere dotata di soli poli semplici e doppiamente periodica. Così, essenzialmente mediante considerazioni algebrico-geometriche di natura elementare, Abel pervenne all'esistenza ed alle proprietà basilari delle funzioni meromorfe doppiamente periodiche (quelle che oggi sono dette *funzioni ellittiche*). In modo impreciso ma efficace possiamo dunque dire che fu il teorema di addizione che permise ad Abel di "propagare" un "germe" di funzione per costruire la funzione $\varphi(z)$.

Col *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions trascendantes* [A, I p. 444-456], Abel riprese, dal punto di vista meno generale delle funzioni iperellittiche (cioè il caso in cui $\chi(y) = y^2 - p_0(x)$), il tema trattato nella memoria parigina. Su quest'ultima, da lui mai dimenticata, provò ad attrarre l'attenzione con una nota a piè di pagina nell'introduzione: "presentai una memoria su queste funzioni all'Accademia Reale delle Scienze di Parigi verso la fine dell'anno 1826". Il 6 gennaio del 1829, a quattro mesi dalla sua morte, Abel richiamò ancora una volta l'attenzione su di essa con una breve nota di assoluta perfezione: *Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions trascendantes*, che apparve postuma sulla rivista del Crelle.

Furono questi due lavori che contribuirono alla diffusione delle idee e dei risultati di Abel sulle funzioni trascendenti, finchè la grande memoria parigina non fu riportata alla luce e stampata nel 1841.

Abel morì il 6 aprile del 1829, all'età di ventisette anni, e l'Accademia di Parigi fu ufficialmente informata della sua morte nella seduta del 22 giugno.

Nel 1832 l'ottuagenario Legendre completò il terzo e ultimo supplemento del suo *Traité* e, il 24 marzo, ne spedì una copia al Crelle per la recensione sul *Journal*. Nella lettera di accompagnamento, Legendre scrisse di essere riuscito a dedurre dal "bel teorema del Sig. Abel" [quello del *Remarques*, dunque relativo al caso oggi detto iperellittico] una nuova intera teoria alla quale ho dato nome di 'Teoria delle funzioni ultra-ellittiche"'. Crelle incaricò C.G. Jacobi della recensione. Jacobi non fu d'accordo con Legendre su un punto: egli preferì chiamare quella classe di funzioni *trascendenti abeliane* anziché "ultraellittiche", poiché era stato Abel che per primo se ne era occupato, ed inoltre suggerì di chiamare *teorema di Abel* il risultato principale della teoria.

Il problema dell'inversione degli integrali abeliani di prima specie fu studiato da Jacobi nel caso iperellittico. Dopo il tentativo fallito di invertire un singolo integrale comprese che questa non era la via da seguire, e nel 1832 [J, II p. 5-16] pose il problema nella giusta prospettiva suggeritagli dal teorema di Abel. Infatti nel *Remarques* [A, I, p. 451], posto g il massimo intero contenuto in $(n-1)/2$ (ossia il genere della curva iperellittica C, $n = \deg \chi(y)$), Abel aveva provato che per gli integrali del tipo

$$\int \frac{q(x)}{\sqrt{p_0(x)}} dx \ ,$$

dove $q(x)$ è un qualsiasi polinomio di grado $\leq g-1$, l'espressione algebrico-logaritmica v si riduceva a una costante, e Jacobi posto

$$u_k = \sum_{j=0}^{g-1} \int_{x_0}^{x_j} \frac{x^k dx}{\sqrt{p(x)}} \ , \ k = 0, ..., g-1; j = 0, ..., g-1$$

enunciò il "teorema di inversione": dati $u_0, ..., u_{g-1}$ determinare le $x_0, ..., x_{g-1}$ in funzione di $u_0, ..., u_{g-1}$. Se $g = 1$ si ha l'inversione dell'integrale ellittico di prima specie, che dà luogo alle funzioni ellittiche; in generale il processo di inversione dà luogo a funzioni meromorfe di g variabili complesse aventi $2g$ periodi indipendenti. Il problema di inversione fu risolto nel caso $g = 2$ da A. Göpel (1847) e da J.G. Rosenhain (1851) indipendentemente, e per ogni valore del genere da K. Weierstrass in una memoria del 1854 [W, I, p. 133-152], nella quale il teorema di addizione di Abel ebbe un ruolo determinante.

Il problema di inversione generale (cioè per $\chi(y)$ qualsiasi, ma irriducibile) fu risolto nel 1857 da Riemann in *Theorie der Abelschen Functionen* [R, p. 88-144]. Qui, per trattare con le funzioni algebriche ed i loro integrali, Riemann utilizzò il concetto "superficie di Riemann" di una funzione algebrica, nel senso di una superficie a più fogli X che riveste $\mathbb{C}_\infty$ (concetto da lui sviluppato già nel 1851), e la definizione delle *funzioni theta* generali, che sono certe funzioni intere di g variabili, (già introdotte da Göpel limitatamente al caso $g = 2$). Nella stessa memoria Riemann dimostrò anche che il numero $m - r$ di Abel coincideva col numero g dei differenziali olomorfi linearmente indipendenti su X e col "genere topologico" di X, concetto che lui stesso aveva introdotto. Uno dei punti salienti nella trattazione di Riemann è l'uso dell'espressione

$$\int \frac{q(x,y)}{\chi_y} dx$$

per rappresentare i differenziali olomorfi già introdotta da Abel nella memoria parigina, dove ora però $q(x, y)$ è un "polinomio aggiunto" (soggetto a certe condizioni lineari dipendenti dalle singolarità di C) di grado $n - 3$.

La memoria di Riemann sulle funzioni abeliane evitò il linguaggio geometrico. Soltanto a partire dal 1863 R.A. Clebsch in [Cl], iniziò a stabilire un legame tra i risultati di Riemann sugli integrali abeliani e la Geometria proiettiva delle curve algebriche piane, che nella prima metà dell'800 si era fortemente sviluppata ad opera di Poncelet, Chasles, Cayley, Plücker ed altri. Le applicazioni geometriche del teorema di Abel fatte dal Clebsch, anche in successivi lavori, attirarono, a partire dal 1870, una schiera di giovani matematici tra i quali: A. Brill e M. Noether in Germania, G. Halphen in Francia, L. Cremona, E. Bertini e C. Segre in Italia, che dettero vita ad un'attiva scuola di Geometria birazionale. In particolare l'idea di Abel di considerare "gruppi di punti" (divisori) variabili su C, dati dalle intersezioni di C con la famiglia razionale di curve $\mathfrak{G}_{\underline{a}}$, si trasformò nel concetto di "serie lineare", concetto che, specialmente nell'ambito della "Scuola italiana", avrà un ruolo importantissimo nello studio delle curve e delle superficie algebriche (v. [BCP]).

La risoluzione del problema di inversione e le funzioni theta permisero successivamente di associare ad ogni curva algebrica un gruppo abeliano, detto varietà *Jacobiana*, che risultò di fondamentale importanza per ulteriori sviluppi della teoria delle curve algebriche, e di fondare la teoria delle *funzioni abeliane*, ossia delle funzioni meromorfe di g variabili aventi $2g$ periodi indipendenti, che trovò (e trova) molte applicazioni nello studio delle varietà algebriche a più dimensioni (v. per esempio [Co]).

"Abel" scrisse C. Hermite "lasciò abbastanza lavoro per 150 anni" [citazione in *Histoire de la Science,* Enciclopédie de la Pléiade 1957, p. 630]. Ma Hermite sbagliò per difetto! Nel 1976, esattamente 150 anni dopo la presentazione della memoria parigina, il lavoro fondamentale di P. Griffiths *Variation on a theorem of Abel* [G], ha aperto nuove vie di applicazione del teorema di addizione.

Cerchiamo di dare un'idea del risultato principale della memoria di Griffiths e, soprattutto, di come esso sia ispitato dal teorema di Abel

Sia $V_n \subset \mathbb{P}^{n+r}$ una varietà algebrica di dimensione n e grado d, priva di componenti multiple, ma eventualmente singolare, e sia ψ una n-forma differenziale meromorfa su V_n. Sia $\mathbb{G}(r, n+r)$ la Grassmanniana degli r-spazi in $\mathbb{P}^{n+r}$ e sia $A \in \mathbb{G}(r, n+r)$ tale che intersechi V_n in d punti distinti $P_1(A), ..., P_d(A)$, allora

$$\mathrm{Tr}(\psi) := \psi(P_1(A)) + ... + \psi(P_d(A))$$

dove $\psi(P_i(A))$ è il "pullback" di ψ sotto la mappa $A \to \psi(P_i(A))$. Allora $\mathrm{Tr}(\psi)$ definisce una n-forma differenziale meromorfa su $\mathbb{G}(r, n+r)$. La ψ è detta di *prima specie rispetto all'immersione* $V_n \subset \mathbb{P}^{n+r}$ se $\mathrm{Tr}(\psi)$ è olomorfa. Poichè non esistono n-forme differenziali olomorfe non nulle su $\mathbb{G}(r, n+r)$, se ψ è di prima specie si ha $\mathrm{Tr}(\psi) \equiv 0$. La relazione

$$\psi(P_1(A)) + ... + \psi(P_d(A)) \equiv 0$$

è interpretata come una relazione funzionale o teorema di addizione che "lega" insieme il comportamento locale di V_n nell'intorno dei punti di intersezione con un r-spazio variabile. Allora il risultato principale della memoria di Griffiths può essere enunciato come segue:

Dati d "germi" di varietà analitica complessa $V_1, ..., V_n$ in $\mathbb{P}^{n+r}$ dotati ciascuno di una n-forma differenziale meromorfa ψ_i, supponiamo che esista un r-piano A_0 tale che intersechi ogni V_i in un punto semplice che non sia un polo per ψ_i ed inoltre che

$$\omega_1(P_1(A)) + ... + \omega_n(P_n(A)) \equiv 0 \tag{6.1}$$

dove $P_i(A)$ è l'intersezione dell'r-spazio A con V_i quando A varia in un piccolo intorno U di A_0. *Allora esiste una varietà algebrica $V_n \subset \mathbb{P}^{n+r}$, dotata di una n-forma differenziale ψ, di prima specie rispetto a questa immersione, tale che ogni $V_i \subset V_n$ e $\psi_{|V_i} = \psi_i$.*

Questo è un tipo di "teorema inverso" rispetto alla relazione (teorema) di Abel (6.1). Intuitivamente, l'equazione funzionale (6.1) permette di "propagare" i "germi"

V_i, nello stesso modo in cui il teorema di addizione di Abel condusse alla costruzione delle funzioni ellittiche (v. [G. p. 325]).

Questo primo lavoro di Griffiths fu seguito da altri, altrettanto importanti, sempre direttamente collegati alla memoria parigina; qui ricordiamo soltanto il recentissimo *Abel's differential equations* del 2002 in collaborazione con M. Green [GG].

Così le idee di Abel trovano ancora oggi applicazione nello studio di importanti problemi sia nel campo della Geometria algebrica che in quello della Geometria analitica complessa, e Phillip Griffiths, concludendo la conferenza di apertura al Congresso svoltosi ad Oslo nel giugno 2002 in occasione del bicentenario della nascita di Abel, ha affermato: "gli 'aspetti aritmetici' delle equazioni differenziali di Abel, costituiranno un argomento centrale della ricerca matematica per il XXI secolo".

È triste pensare che il giovane Abel morì, senza alcun presentimento della gloria presente della sua "memoria parigina".

Bibliografia

[A] Abel N.H., *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, 2 vols., Christiania 1881.

[BCP] Brigaglia A., Ciliberto C., Pedrini C., *The Italian School of Algebraic Geometry and Abel's legacy*, in "The legacy of Niels Henrik Abel, the Bicentennial Conference", Oslo June 3-8, 2002, eds. O.A. Laudal and R. Piene, Springer (in corso di stampa).

[Cl] Clebsch R.A., *Über die Anwendungen der Abel'schen Funktionen in der Geometrie*, J. für Math., 63 (1864).

[Co] Conforto F., *Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie*, Springer Verlag 1956.

[E] Euler L., *Opera omnia*, prima serie, 1-19, Teubner 1911.

[F] Fagnano G., *Opere matematiche*, voll. 3, Milano-Roma-Napoli 1911.

[GG] Green M., Griffiths P., *Abel's differential equations*, Houston Math. J. 28(2002).

[G] Griffiths P., *Variationn on a theorem of Abel*, Inventiones 35 (1976).

[J] Jacobi C.G., *Gesammelte Werke*, Bd. 1-8, Berlin 1881-1891.

[L] Lagrange J., *Oeuvres*, 9 vols., Paris 1881.

[Le] Legendre A. M., *Traité des fonctions élliptiques et des integrales eulériennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numerique*, Paris 1825-1832.

[M] Miranda R., *Algebraic curves and Riemann surfaces*, GSM 5, Am. Math. Soc, 1995.

[P] Picard E., *Traité d'Analyse*, 3 vols., 3^{me} ed. Paris 1922-1928.

[R] Riemann B., *Oeuvres mathématiques*, Gauthier-Villars 1898 (2me ed. 1990).

[S] Springer G.,*Introduction to Riemann surfaces*,Addison-Wesley, 1957.

[W] Weierstrass K., *Mathematische Werke*, Bd. 1-7, Berlin 1894-1927

Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara,
E-mail address: cen@dns.unife.it