John F. Nash, Jr. og Louis Nirenberg, Abelprisvinnere 2015

VI BEHOLDER ALLE AVSTANDER ...

Abel-komiteen sier i sin begrunnelse for tildelingen av årets Abelpris: "Nash sine embeddingsteoremer står blant de mest originale resultatene innen geometrisk analyse i det tjuende århundre." ... "Nirenbergs fundamentale embeddingsteoremer for sfæren S^2 i $\mathbb{R}^3$, med foreskrevet Gauss-krumning eller Riemannsk metrikk, løste de klassiske problemene til Minkowski og Weyl."

Nerveceller er ikke jevnt fordelt i kroppen. Noen kroppsdeler, som hender, ansikt og tunge er mye mer sensitivie for sanneseinntrykk enn andre. Tettheten av nerveceller er størst i disse områdene. En funksjon som måler tettheten av nerveceller er et eksempel på det matematikere ville kalle en metrikk. Et annet eksempel på en metrikk er den såkalte Euklidske metrikken, oppkalt etter den greske matematikeren Euklid. Den Euklidske metrikken måler vanlige avstander mellom punkter. I et arbeid fra 1916 stilte Hermann Weyl følgende spørsmål: *Er det alltid mulig å realisere en abstrakt metrikk med positiv krumning på en kuleflate ved en isometrisk embedding i $\mathbb{R}^3$?* Dersom man tenker på tetthet av nerveceller som en metrikk og menneskekroppen som en kuleflate (!), så vil den temmelig fortegnede kroppen i figuren illustrere et positivt svar på Weyls problem. Forskjellen i størrelse på de ulike kroppsdelene svarer presis til tettheten av nerveceller.

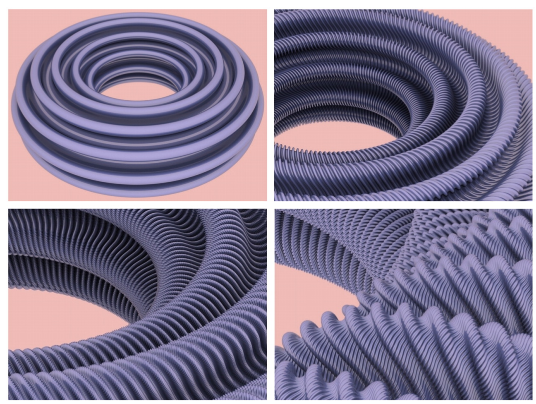
Figur 1: Størrelsen på de ulike kroppsdelene reflekterer tettheten av nerveceller. (Kilde: Natural History Museum, London)

Lenge før romskipene ga oss bilder av jorda, kunne våre forfedre konkludere med at jorda var rund. De baserte sin kunnskap på observasjoner gjort på jordoverflaten. Ved å gjøre smarte observasjoner og nøyaktige beregninger var de i stand til å konkludere med at jorda ikke kunne være flat. Dersom du tar utgangspunkt i et punkt på en kuleflate og beveger deg i en sirkelformet bane i avstand R, så skulle tilbakelagt distanse være $2\pi R$ dersom jorda var flat. Men hvis du måler veldig nøyaktig på kuleflaten vil du finne at omkretsen er litt for kort. En teoretisk beregning forteller oss da at jordoverflaten er krum, dvs. at der du står må den være kuleformet.

Det faktum at det er mulig å si noe om krumningen, kun basert på observasjoner gjort på flaten, ble formulert presist av den store matematikeren Carl Friedrich Gauss i 1827, i det som kalles Gauss' Theorema Egregium, *det oppsiktsvekkende teoremet*. Teoremet sier at krumningen til en flate kan bestemmes utelukkende ved å måle avstander og vinkler på selve flaten, uten å måtte referere til hvordan flaten er plassert i det 3-dimensjonale rommet. Krumning er en intrinsisk egenskap ved flaten, dvs. en egenskap som hører til flatens egen natur. Dermed vil den også bli bevart ved en isometrisk (avstandsbevarende) embedding.

I det første embeddings-teoremet til John F. Nash, Jr., publisert i 1954, viser han at en såkalt Riemannsk mangfoldighet kan embeddes isometrisk i et Euklidsk rom ved en C^1-avbildning. Essensen i kurve-versjonen av dette resultatet er at enhver kurve i planet kan forlenges vilkårlig, uten å krysse seg selv, og ligge så nært opptil den opprinnelige kurven vi bare måtte ønske. Den forlengede kurven ser litt ut som sporet etter forhjulet til en syklist som klatrer opp en bratt bakke, mens bakhjulet følger den opprinnelige kurven. Ved å øke frekvensen av forhjuls-svinger kan syklisten øke avstanden mellom distansen for- og bakhjulene ruller. Den nye kurven har økt krumning, men i motsetning til hva tilfellet er for en flate, trenger ikke krumningen til en kurve å bli bevart ved en isometrisk embedding.

Den en-dimensjonale versjonen av Nash sitt teorem er nokså intuitiv, men den todimensjonale er absolutt ikke det, snarere tvert i mot. Dette kan illustreres på følgende måte. Start med et papirark og rull det til en sylinder. Det er ikke spesielt vanskelig. Det neste skrittet er derimot mye værre. Vi skal bøye sylinderen til en smultring-formet flate uten å strekke eller rive i papiret. Dette virker til å være umulig. Den ytre omkretsen av smultringen er mye lenger enn den indre, men i sylinderen er de like lange. Men Nash sitt resultat sier at dette likevel er mulig, i det minste i teorien. Nash beviste resultatet i 1954, men det var først i 2012 at et tverrfaglig team i Frankrike, HEVEA-prosjektet, klarte å lage bilder av prosessen der sylinderen bøyes til en smultring på denne måten. Illustrasjonene i Figur 2 gir et bilde av prosessen, papiret må foldes uendelig mange ganger, i flere retninger, og på den måten danne en smultring-flate hvor det opprinnelige papiret faktisk er helt intakt.



Figur 2: Bilder av en isometrisk embedding av en flat torus i $\mathbb{R}^3$. (Source: HEVEA Project/PNAS)