Abelprisen 2008

En kort innføring i gruppeteori

Siden Abelprisen for 2008 deles ut for arbeider innen gruppeteori kan det være nyttig med en liten innføring i den formelle teorien. Vi skal gå gjennom de viktigste definisjonene og se på noen grunnleggende eksempler. Dette er ikke tenkt som noen lærebok i emnet, men mer til hygge og atspredelse for de spesielt interesserte.

Definisjon

En **gruppe** er en mengde G med en binær operasjon $G \times G \to G$ som til et hvert par av elementer x, y i G tilordner et entydig gitt tredje element xy i G, slik at følgende aksiomer er oppfylt:

1. Assosiativ lov: $(xy)z=x(yz)$ for alle elementer x,y,z i G.
2. Eksistens av enhetselement, dvs et element e i G som oppfyller $xe=ex=x$ for alle x i G.
3. Eksistens av inverser, dvs for all x i G, så finnes det et element y i G, kalt inversen til x, som oppfyller $xy=yx=e$. Vi skriver $y=x^{-1}$.

Dersom i tillegg kommutativitetsaksiomet er oppfylt sier vi at gruppa er **abelsk**, oppkalt etter Niels Henrik Abel:

4. Kommutativ lov: $xy=yx$ for alle x,y i G.

For en abelsk gruppe skriver vi ofte den binære operasjonen som + og ikke som produkt. Enhetselementet kaller vi 0 og inversene betegnes med $-x$ i stedet for x^{-1}.

Eksempel 1

La G være mengden av hele tall, positive og negative, angitt ved bokstaven $\boldsymbol{Z}$. Bak den mystiske betegnelsen binær operasjon skjuler det seg i dette eksempelet intet annet enn vanlig addisjon; til et par av hele tall tilordner vi et tredje hele tall, nemlig summen av de to tallene. Enhetselementet i $\boldsymbol{Z}$ er tallet 0, som ved addisjon ikke endrer noen ting, og inversen til et tall x er $-x$, uansett om x er positiv eller negativ. F.eks. vil inversen til -2 være -(-2)=2. Dette er videre en abelsk gruppe, siden rekkefølgen på leddene i en addisjon er uvesentlig; 2+5=5+2.

Eksempel 2

Vårt andre eksempel henter vi fra symmetriene til et kvadrat. Vi nummererer hjørnene i kvadratet på følgende måte: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. En speiling om den vertikale midtlinja gir oss $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Vi kaller denne speilingen S. En 90-graders rotasjon med klokka gir oss $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ som vi kaller R. Dersom vi speiler to ganger om samme akse kommer vi tilbake der vi startet. Dette skriver vi som $SS=S^2=e$, mens det skal fire 90-graders rotasjoner til før vi er tilbake ved utgangspunktet, dvs $R^4=e$. Nå er det faktisk slik at de to symmetriene R og S genererer hele symmetrigruppa, dvs vi kan få fram enhver speiling (om vilkårlig symmetriakse) og rotasjon ved å kombinere disse to. F.eks. vil en speiling om den horisontale symmetriaksen, altså $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oppnås ved først S og deretter to ganger R. Merk at denne gruppa ikke er abelsk. Det er lett å forvisse seg om det ved å klippe ut et kvadratisk ark, sette nummer på hvert hjørne (samme nummer på over- og undersiden av hvert hjørne) og prøve seg fram. Dersom vi først speiler (S) og deretter roterer 90 grader med klokka (R) er dette det samme som å først rotere 90 grader mot klokka (R^{-1}) og deretter speile (S). Vi skriver dette som $SR=R^{-1}S$. Gruppa av symmetriene til et kvadrat har fått betegnelsen D_4 (*Dihedrale gruppe* på 4 hjørner).

Eksempel 3
Den aller minste gruppa som finnes er den som kun består av enhetselementet, $G=\{e\}$. Denne gruppa kalles **den trivielle gruppa**.

Når matematikere har definert et begrep slik vi nå har gjort, har de en sterk hang til å gå videre i en bestemt retning, nemlig ved å definere avbildninger mellom objektene, underobjekter og kvosienter. Kvosientene skal vi hoppe over i denne teksten, men vi tar med definisjonen av avbildninger og underobjekter.

Definisjon
En avbildning $\beta : G \to G'$ mellom to grupper G og G' kalles en **homomorfi** dersom den bevarer gruppestrukturen, dvs tar produkter på produkter, enhetselementet på enhetselementet og inverser på inverser. Vi sammenfatter dette i det ene aksiomet

$$\beta(xy) = \beta(x)\beta(y)$$

for alle elementer x,y i G. Det følger av dette ene aksiomet og gruppeaksiomene at enhetselementet avbildes på enhetselementet og inverser på inverser.

Eksempel 4
Vi kan definere en homomorfi $\beta : Z \to D_4$ ved at $\beta(n) = R^n$ for alle hele tall n. Det er lett å se at denne avbildningen tilfredstiller aksiomet for en homomorfi;

$$\beta(n+m) = R^{n+m} = R^n R^m = \beta(n)\beta(m)$$

(Ikke bli forvirret av at gruppeoperasjonen skrives som + i **Z** og som multiplikasjon i D_4). Siden R er en 90-graders rotasjon ser vi at $\beta(4) = e$ og også at det samme, altså $\beta(n) = e$, vil gjelde for alle hele tall n som er delelig med 4. I dette tilfellet kaller vi mengden av alle hele tall som er delelig med 4 for **kjernen** til homomorfien. Dette er selvfølgelig også et helt generelt begrep, kjernen til en homomorfi er alltid betegnelsen på den delmengden som avbildes på enhetselementet.

Definisjon
(Svak versjon): En delmengde H av en gruppe G kalles en **undergruppe** av G dersom H selv er en gruppe med samme binære operasjon som den har arvet fra G.
(Sterk versjon): En undergruppe H av G kalles en **normal** undergruppe dersom den er kjernen i en homomorfi fra G inn i en eller annen gruppe.

Så hvorfor skiller vi mellom svak og sterk versjon av begrepet undergruppe? Årsaken er at den svake versjonen er den naturlige og mest generelle måten å definere begrepet undergruppe, mens den sterke versjonen er akkurat det som tvinger seg fram når vi skal prøve å bygge opp alle grupper fra de simple gruppene, dvs de gruppene som spiller rollen til atomene, "de udelelige byggesteinene".

Definisjon
En gruppe G kalles **simpel** dersom den ikke har noen andre normale undergrupper enn den trivielle undergruppa og seg selv.

De simple gruppene spiller i gruppeteorien samme rolle som atomene spiller i kjemien, som primtallene spiller i tallteorien og som punktene spiller i geometrien.

Det er i prinsippet ikke noen begrensninger på hvor mange elementer en gruppe kan ha. Den trivielle gruppa har ett element og heltallene **Z** har uendelig mange elementer. Det er 8 symmetrier av et kvadrat, så den dihedrale gruppa D_4 har 8 elementer.

Dermed har vi lagt grunnlaget for en teori. Fortsettelsen omfatter mangfoldige hyllemeter med litteratur som vi overlater til den enkelte å trenge inn i. Men de grunnleggende definisjonene er hele tiden de vi har presentert her.