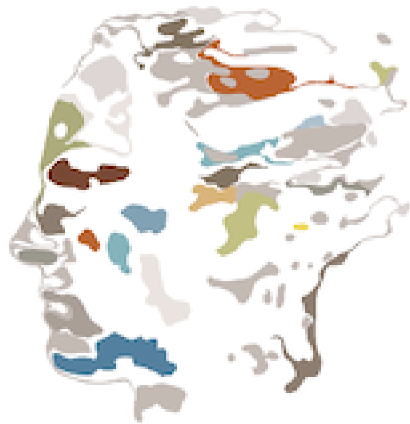


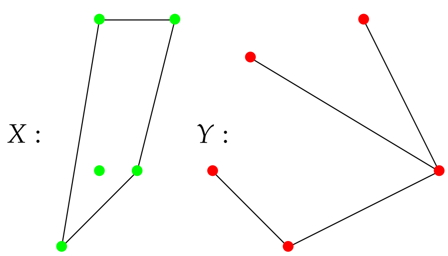
Dennis Parnell Sullivan
Abelprisvinner 2022

En algebraisk modell for topologiske rom

Abelkomiteen sier i sin begrunnelse for årets tildeling:

... Sullivan`s model is based on differential forms, an idea of multivariable calculus, enabling direct connection to geometry and analysis. This made a major part of algebraic topology suitable for calculation, and has proved revolutionary. ...

Algebraisering av topologi



De to figurene X og Y har begge 5 hjørner og 5 kanter, men selv om antallene er de samme betyr det ikke at figurene er like. Riktignok er det ikke så vanskelig å beskrive forskjellen mellom dem, men det var likevel et enorm framskritt da Emmy Noether midt på 1920-tallet introduserte tanken om å algebarisere topologien i figurene. Hennes forslag var å erstatte antallene med tilsvarende antall kopier av $\mathbb{Z}$ og la sammenhengen mellom kanter og hjørner være kodet i en avbildning d mellom de to versjonene av 5 kopier av $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}^5 \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^5$$

Denne kjedekompleksen til det topologiske rommet kan effektivt brukes til å regne ut noen topologiske invarianter til de to figurene; For X får vi homologigrupper

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2, \quad H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

som uttrykker at X har to komponenter og en loop, mens vi for Y får

$$H_0(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(Y, \mathbb{Z}) = 0$$

som betyr at vi kun har en komponent, og ingen looper. Det ligger implisitt i de to siste utsagnene at H_0 måler antall komponenter og at H_1 ”teller” antall looper.

de Rhams Teorem

Et annet eksempel på algebraisering av topologi skriver seg til bake til begynnelsen av 1930-tallet og den sveitsiske matematikeren George de Rham. de Rhams teorem sier at for en glatt mangfoldighet M uten rand hr vi en isomorfi mellom kohomologigrupper

$$H^n_{dR}(M) \simeq H^n(M, \mathbb{R})$$

for alle $n \geq 0$. de Rahm-kohomologi $H^n_{dR}(M)$ er gitt som kvosienten av lukkede n-former (former ω med $d\omega = 0$) og eksakte former (former på formen $d\eta$) for mangfoldigheten M, mens $H^n(M, \mathbb{R})$ er laget av homologien, omtrent som i beskrivelsen over. Isomorfien mellom de to kohomologiteoriene er gitt ved at for hver homologiklasse $[c]$ i M avbildes en n-form ω på integralet av formen langs homologiklassen;

$$\omega \mapsto \int_{[c]} \omega$$

Avbilningen er veldefinert ved Stokes teorem siden

$$d\omega \mapsto \int_{[c]} d\omega = \int_{\partial[c]} \omega = 0$$

de Rhams teorem bygger en bro mellom to ulike beskrivelser av mangfoldigheten M. En isomorfi på kohomologi-nivå omtales ofte som en quasi-isomorfi av de underliggende kompleksene;

$$(\Omega^\bullet(M), d_{dR}) \xrightarrow{\simeq} (C^\bullet(M), \partial)$$

de Rham-kompleksen er bygget opp på differensialformer og koder egenskapene ved den differensiable strukturen til M. Kompleksen $(C^\bullet(M), \partial)$ reflekterer en oppbygging av M ved hjelp av enklere geometriske objekter, f.eks. linjestykker, trekanter, tetraeder, etc. Når vi går til kohomologi blir geometrien av hver enkelt bestanddel uvesentlig, det som står igjen er kombinatorikken i oppbyggingen. Ta en sirkel som et eksempel. Hvis vi skjøter sammen to linjestykker i endepunktene, får vi noe som topologisk sett er det samme som ett linjestykke. Skjøter vi derimot sammen to steder, får vi noe som likner mer på en sirkel. Kohomologien bryr seg ikke om hvordan linjestykkene ser ut, men den fanger opp om vi har en eller to skjøter.

Sullivanmodellen

de Rham-kompleksen er et eksempel på det som kalles en kommutativ differensialgradert algebra (CDGA). Dette er objekter med rik struktur, og ikke minst, godt egnet for å gjøre beregninger. De Rhams teorem kan sees på som en måte å knytte den geometriske strukturen som beskrevet over til et matematisk objekt som egner seg for beregninger. Forutsetningen i de Rhams teorem er at det geometriske objektet er en glatt mangfoldighet. Sullivan satte seg som mål å generalisere de Rhams teorem til topologiske rom X uten den nødvendige differensial-strukturen. Sullivans modell er et svar på denne utfordringen. På en systematisk og skrittvis måte bygger Sullivan opp en CDGA med bakgrunn i den geometriske oppbyggingen av rommet X. Algebraen plukker ut det aller vesentligste på en så nøyaktig måte at kunnskap om algebraen faktisk er nok ti å rekonstruere objektet. Selvfølgelig ikke ned på et detaljnivå, men med fokus på strukturen i den geometriske konstruksjonen.

Kraften i denne konstruksjonen ligger i det faktum at en geometrisk struktur erstattes med en nærmest ekvivalent algebraisk struktur med en mye større fleksibilitet når det kommer til beregninger.

For å se på et konkret eksempel på en Sullivanmodell kan vi se på sirkelen S^1. Det finnes ikke noen avbildninger fra S^n, $n \geq 2$ inn i sirkelen som ikke kan trekkes sammen til et punkt. Det betyr at Sullivanmodellen kun har ett basiselement a, i grad 1 og trivielt differensial. Siden modellen er antatt å være gradert kommutativ har vi for $a_1 = a_2 = a$

$$a^2 = a_1 \cdot a_2 = (-1)^{1\cdot 1} a_2 \cdot a_1 = -a^2$$

og det følger at $a^2 = 0$.

For kuleskallet S^2 har vi en litt annen situasjon. For alle n-sfærer har vi en generator a i grad $n = 2$. I motsetning til hva som var tilfellet for S^1 har vi når a har grad 2 at

$$a^2 = a_1 \cdot a_2 = (-1)^{2\cdot 2} a_2 \cdot a_1 = a^2$$

Det betyr at vi ikke har noen betingelse på a^2. For å unngå at a^2 blir en del av modellen introduserer vi et element b i grad 3, slik at $db = a^2$. Det betyr at Sullivanmodellen for en jevn sfære blir

$$(\wedge(a, b), a^2 = db, da = 0)$$

der deg$(a) = 2$ og deg$(b) = 3$.