



Dennis Parnell Sullivan Abelprisvinner 2022

.. for hans banebrytende bidrag til hele bredden av topologi ..

Abelkomiteen sier i sin begrunnelse for årets tildeling:

"In the late 19th century, a new qualitative way of looking at geometry was born: the subject of topology. In topology a circle and a square are the same, but the surface of the earth and that of a donut are different. Developing a precise language and quantitative tools for measuring the properties of objects that don't change when they are deformed has been invaluable throughout mathematics and beyond, with significant applications in physics to economics to data science.

Dennis Sullivan has repeatedly changed the landscape of topology by defining new concepts, proving landmark theorems answering old conjectures and formulating new problems that have driven the field. He moved from area to area, seemingly effortlessly, using algebraic, analytic, and geometric ideas as a true virtuoso."

Topologi

De klassiske kjerneområdene i matematikk er aritmetikk og geometri. Aritmetikk tar for seg regning med tall, mens geometri dreier seg om å studere og klassifisere former, abstrakte såvel som de vi observerer rundt oss. Vi har en velutviklet evne til å skille geometriske former fra hverandre. Men vi er også flinke til å se fellestrekk ved ellers ulike former. Et eksempel er formlikhet. Formlikhet innebærer at to figurer har samme form, men ulik størrelse.

I noen sammenhenger kan det være hensiktsmessig

å plassere objekter med enda større variasjon i samme klasse: Det finnes mange forskjellige rundkjøringer, men vi er sjelden i tvil om at noe er en rundkjøring. Det handler hverken om detaljer i utformingen eller størrelsen; det handler kun om det som oftest runde feltet i midten av rundkjøringen som det ikke er meningen at man skal bevege seg over. Definisjonen av en rundkjøring har på sett og vis noe topologisk over seg. En åpen plass blir til en rundkjøring først nå man fjerner et sentralt plassert felt på plassen.



Foto: Adrian Pingstone

I sin begrunnelse for tildelingen av årets Abelpris sier komiteen at sett gjennom topologiske briller er en sirkel og en firkant det samme, mens et kuleskall og en torus er forskjellige. Likeledes er en sirkel og en rett linje topologisk forskjellige, ikke fordi den ene er rett og den andre er krum, men fordi den ene har to løse ender, mens den andre er en lukket kurve og derfor ikke har noen løse ender.

Topologisk klassifikasjon er en svært grovkornet klassifikasjon av geometriske objekter. Den er blind for alle uvesentlige detaljer, og fokuserer på de store linjene i



geometrien. Akkurat som med rundkjøringene, det er uvesentlig hvordan de ser ut, så lenge de har feltet i midten hvor ingen skal kjøre. Sullivan har vært en viktig bidragsyter til å bygge opp en verktøykasse, egnet til å karakterisere topologiske rom.

Det første verktøyet som ble lagt i denne kassa, riktignok lenge før Sullivans tid, var fundamentalgruppa.

Fundamentalgrupper

Først da menneskene klarte å sende opp romskip i bane rundt jorda, kunne man virkelig se med egne øyne det som vi hadde visst i hundrevis av år, at jorda er rund. Til daglig framstår den som rimelig flat. Dette reflekterer spillet mellom det lokale og det globale. Vi kan si at topologien ikke bryr seg spesielt om det lokale, men er mer opptatt av globale egenskaper. Om et legeme er avrundet i kantene eller har spisse hjørner, det går ut på ett. Men en smultring og en ball er grunnleggende forskjellig. En kaffekopp med en hank er imidlertid det samme som en smultring.

Vi skal se på topologens måte å kvantisere forskjellen på en ball og en smultring. Litt mer generelt tenker vi oss at vi har et geometrisk objekt X , en flate, et legeme, eller noe som kanskje er satt sammen av slike. En lukket kurve på dette objektet er en avbildning

$$\gamma : S^1 \rightarrow X$$

av en sirkel inn i objektet. Hvis X er overflaten til en ball, så kan vi betrakte denne kurven som en løkke som vi plasserer på ballen. Det finnes selvfølgelig uendelig mange slike tenkte løkker på en ball og for å skille topologiske vesentligheter fra topologiske uvesentligheter, tenker vi oss at to løkker er ekvivalent dersom vi kan dra den ene over i den andre på en kontinuerlig måte. Vær obs på at et enslig punkt er også formelt en løkke, siden avbildningen $\gamma : S^1 \rightarrow X$ gjerne kan avbilde hele sirkelen på ett punkt. Vi kaller denne løkka for 0-løkke. En mer generell løkke vil da være ekvivalent med 0-løkken dersom vi kan snurpe sammen løkken til et punkt, uten å forlate overfalten, ei heller å kutte over tråden.

Det er lett å forvise seg om at dette alltid er mulig så lenge løkken ligger på en ball. På en smultringflate (torus) stiller saken seg veldig annerledes. Dersom løkka enten ligger rundt hullet på torusen, som den blå kurven på figuren, eller går rundt tuben (som den røde kurven), så vil det være umulig å snurpe den inn. Denne konstruksjonen beskriver det som kalles fundamentalgruppa π_1 til det geometriske objektet.

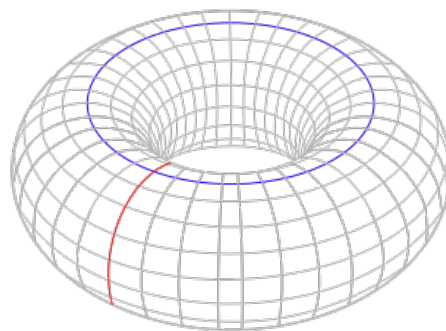
$$\pi_1(X) = \{\gamma : S^1 \rightarrow X\} / \sim$$

Notasjonen $/ \sim$ betyr at vi heller enn å studere enkeltkurver, er mer opptatt av ekvivalensklasser av kurver. På et

kuleskall S^2 kan alle løkker snurpes inn og $\pi_1(S^2) = 0$, mens vi på torusen har to sirkler, den blå b rundt hullet, og den røde r rundt tuben. I tillegg kan vi jo løkka gå mange ganger rundt hullet og samtidig mange ganger rundt tuben. Et eksempel på et element i fundamentalgruppa til torusen kan være

$$aaba^{-1}bba$$

som svarer til en løkke som (lest fra høyre) først går rundt den blå, deretter to ganger rundt den røde, så motsatt vei rundt den blå (a^{-1}), rundt den røde og til slutt to ganger rundt den blå.



Fundamentalgruppa måler hvor mange ekvivalensklasser av sirkler som finnes i det geometriske objektet. Vi skal se på et eksempel hvor dette er en viktig problemstilling.

La det geometriske objektet være elektrisitetsnettet i en region, litt skjematisk og forenklet framstilt i figuren under. En vesentlig sikkerhetsfaktor knyttet til et strømnnett er robustheten av nettet ved eventuelle linjebrudd. Hvis vi kutter strømmen ett sted, så skal det alltid finnes en annen vei rundt. Det betyr at det må finnes minst en loop i nettverket, dvs. en avbildning av sirkelen S^1 . Det betyr at fundamentalgruppa til nettet er med på å beskrive robustheten av nettet. Jo flere looper som finnes, og dermed mer kompleks fundamentalgruppe, jo lettere er det for strømmen å finne en alternativ rute.

