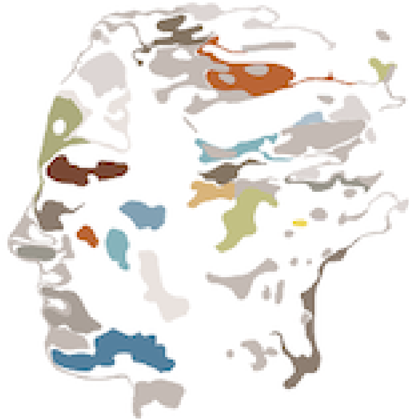


Luis Caffarelli
Vinner av Abelprisen 2023

Fri rand-problemer

Som på et avtalt signal blir det helt stille på banen. To av verdens beste tennisspillerne kikker nervøst på hverandre og forbereder seg på den avgjørende serven i den siste kampen i årets Wimbledon-turnering. Spilleren som står med ballen skyver solskjermen sin litt lenger opp i pannen og begynner å sprette. Ballen treffer det velfriserte gresset og med en nesten uhørlig lyd spretter den tilbake mot den utstrakte hånda...

Source: Screen dump of: ScienceLuxembourg <https://youtu.be/1yT0hxplVBg>

Hvorfor spretter ballen tilbake? Bildet av den deformerte ballen illustrerer hva som skjer. Når den treffer bakken blir ballen presset sammen. Den relativt stabile formen på ballen gjør at de indre kreftene begynne å presse ballen tilbake til dens opprinnelige form. Endringen skjer med en viss hastighet, forårsaket av elastisiteten i ballen. Hastigheten er høy nok, ikke bare til å få ballen tilbake til sin opprinnelige form, men også til å gi den fart oppover. En erfaren tennisspiller vet at kinetisk energi ikke går tapt i en uelastisk kollisjon og juster kraften akkurat så mye som skal til.

For en fysiker vil denne forklaringen på hva som skjer være tilstrekkelig, men en matematikeren vil gjerne trenge dypere inn i materien. Er det mulig å formulere en matematisk modell for ballens form gjennom kollisjonen? Modellen må kombinere bevegelseslover, krefter forårsaket av det økte trykket inne i ballen når den presses sammen og elastisiteten i ball-materialet.

Før ballen treffer bakken vil ballen fortsatt være rund. Når den treffer underlaget, vil kontaktflaten mellom ballen og bakken være like flat som bakken. Resten av ballen får en slags oval form. Et problem med å modellere denne deformasjonen er at kontaktflaten mellom ballen og bakken varierer gjennom kollisjonen, fra ett enslig kontaktpunkt til å omfatte en større andel av ballens overflate. På tross av at kollisjonen er styrt av velkjente fysiske lover er det ikke noen lett oppgave å skrive opp en matematisk likning for deformasjonen av ballen. Enda vanskeligere er det å finne en løsning av likningen, dvs. gi en presis formulering for bevegelsene til ethvert punkt på ballens overflate.

Det som gjør dette spesielt vanskelig er at vi her har å gjøre med et såkalt “ fri rand-problem”, et fagområde årets Abelprisvinner Luis Caffarellis har god kjennskap til. En vanlig forutsetning for å finne løsningen for en matematisk modell, er god kunnskap om systemet vi studerer. Spesielt er det viktig å vite noe om formen til de geometriske objektene som inngår.

Hvis du dypper en sølvskje ned i en tekopp, vil varmen fra teen spre seg gjennom metallet og du vil ganske raskt kjenne det i fingertuppene. For å modellere hvordan varmen transporteres gjennom skjeen, bruker vi Fouriers varmediffusjons-modell. En forutsetning for å regne på denne modellen, er at vi kjenner formen og størrelsen på skjeen. Det samme vil være tilfellet for ballen som spretter. Gjennom den uelastiske kollisjonen mellom ballen og bakken, vil grenselinja mellom den flattrykte og den ovale delen av ballen være i kontinuerlig endring. Beregning av denne grenselinja bygger på den fysiske modellen for kollisjonen. Konsekvensen er at for å finne en beskrivelse av prosessen, må vi håndtere et koblet problem; Løsningen av den matematiske modellen som beskriver formen til den ovale delen av ballen avhenger av formen på kontaktflaten mellom ballen og bakken, mens denne formen på sin side avhenger av en nøyaktig beskrivelse av endringen av den ovale delen av ballen. Denne koblede problemstillingen, hvor løsningen av to delproblemer gjensidig bygger på hverandre er et eksempel på et fri rand-problem.

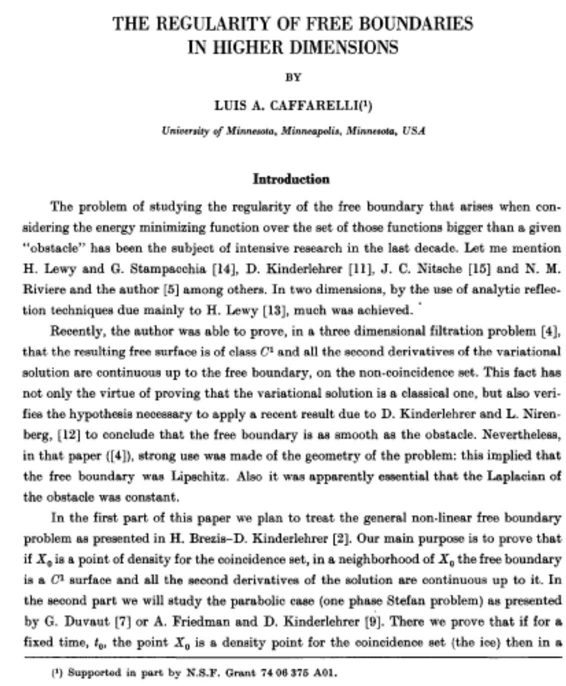
Det finnes mange andre eksempler på fri rand-problemer i naturen, til og med i vår vanlig hverdag. Hvis man slipper en isbit ned i et glass vann vil varmen i vannet overføres til isen, og etter hvert vil isen smelte. Varmetransport er godt forstått gjennom den matematiske modellen for diffusjon, men det er forskjell på transporthastigheten i is og vann. Den frie randen i dette eksemplet er overflaten til isbiten. For å finne en eksakt løsning av smelte-problemet trenger vi en presis beskrivelse av den frie randa. Denne randa er imidlertid ikke konstant, den endrer seg hele tida på grunn av issmeltingen.

Igjen har vi en koblet problemstilling; for å løse diffusjonsmodellen for varmetransport i is og vann må vi ha eksakt kjennskap til grenseflaten mellom de to fasene. For å få kunnskap om grenseflaten må vi løse diffusjonsmodellen for de to fasene hver for seg, noe vi ikke kan gjøre uten at vi vet nøyaktig hvordan grenseflaten ser ut. Det tvinger seg fram at vi må løse de to problemene simultant, og det er det som gjør det hele så vanskelig.

Dette problemet med isbiten kalles vanligvis for det to-fase Stefan-problemet, oppkalt etter Josef Stefan, en slovensk fysiker som introduserte flere liknende problemer i tida rundt 1890.

I praksis er det umulig å gi en fullstendig løsning på et generelt fri rand-problem. Som et plaster på såret, sett gjennom matematiske briller, kan vi prøve å finne ut av hvordan kontaktflaten utvikler seg. For Stefan-problemet kan dette også ha en mer dramatisk side. Hvis vi skalerer opp størrelsen på isbiten kan Stefan-problemet illustrere et alvorlig globalt problem som dreier seg om Thwaites-breen i Antarktis, med rette også kalt Dommedagsbreen. Denne breen bevegers seg stadig i retning mot havet, muligens forårsaket av menneskeskapte klimeandringer. Hvis hele Dommedagsbreen skulle kollapse ut i havet, og deretter smelte, ville verdenshavene samlet stige med 65 cm. I tillegg ville breen mest sannsynlig dele seg i mindre biter som så ville drive rundt og utgjøre en konstant fare for skipsfarten. Det hører med til historien at Dommedagsbreen er på størrelse med Storbritannia. I et slikt perspektiv er et grundigere studium av Stefan-problemet ikke helt uaktuelt.

Luis Caffarelli forfattet i 1977 en matematisk avhandling med tittelen; "The regularity of free boundaries in higher dimension". I avhandlingen presenterer Caffarelli en metode for å takle fri rand-problematikken, og han klarer å bevise at formen på kontaktflatene nødvendigvis må utvikle seg på en relativt kontrollert måte. Litt forenklet kan vi si at Caffarelli på en matematisk strigent måte klarte å vise at isbitene gjennom smelteprosessen vil bevare sin fine og glatte overflate,



THE REGULARITY OF FREE BOUNDARIES IN HIGHER DIMENSIONS

BY

LUIS A. CAFFARELLI(1)

University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, USA

Introduction

The problem of studying the regularity of the free boundary that arises when considering the energy minimizing function over the set of those functions bigger than a given "obstacle" has been the subject of intensive research in the last decade. Let me mention H. Lewy and G. Stampacchia [14], D. Kinderlehrer [11], J. C. Nitsche [15] and N. M. Riviere and the author [5] among others. In two dimensions, by the use of analytic reflection techniques due mainly to H. Lewy [13], much was achieved.

Recently, the author was able to prove, in a three dimensional filtration problem [4], that the resulting free surface is of class C^1 and all the second derivatives of the variational solution are continuous up to the free boundary, on the non-coincidence set. This fact has not only the virtue of proving that the variational solution is a classical one, but also verifies the hypothesis necessary to apply a recent result due to D. Kinderlehrer and L. Nirenberg, [12] to conclude that the free boundary is as smooth as the obstacle. Nevertheless, in that paper ([4]), strong use was made of the geometry of the problem: this implied that the free boundary was Lipschitz. Also it was apparently essential that the Laplacian of the obstacle was constant.

In the first part of this paper we plan to treat the general non-linear free boundary problem as presented in H. Brezis–D. Kinderlehrer [2]. Our main purpose is to prove that if X_0 is a point of density for the coincidence set, in a neighborhood of X_0 the free boundary is a C^1 surface and all the second derivatives of the solution are continuous up to it. In the second part we will study the parabolic case (one phase Stefan problem) as presented by G. Duvaut [7] or A. Friedman and D. Kinderlehrer [9]. There we prove that if for a fixed time, t_0, the point X_0 is a density point for the coincidence set (the ice) then in a

(1) Supported in part by N.S.F. Grant 74 06 375 A01.

11 – 772905 *Acta Mathematica* 139. Imprimé le 30 Décembre 1977

Forsiden av Caffarellis papir fra 1977

Caffarellis avhandling viste seg å bli et viktig utgangspunkt for omfattende forskningsvirksomhet mot en bedre forståelse av en lang rekke matematiske modeller, blant annet Navier-Stokes-ligningene, Hindrings-problemet og Monge-Ampere-ligningen. Mange matematikere har i ettertid jobbet med disse problemene, med Luis Caffarelli som en sentral bidragsyter og ledestjerne.