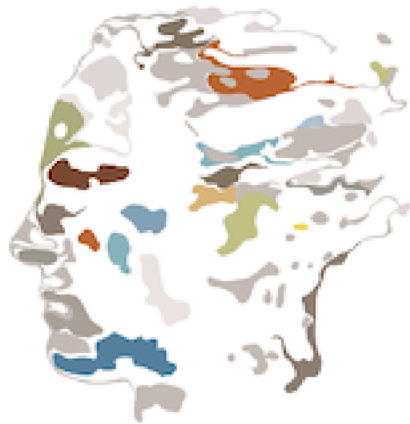
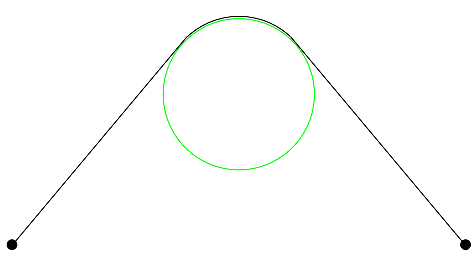


# Luis Caffarelli
# Vinner av Abelprisen 2023

## Hindrings-problemet

Den iboende egenskapen til en strikk er å trekke seg mest mulig sammen, og dermed finne den korteste veien mellom de to endepunktene. Den korteste veien mellom to punkter er en rett linje. Så en strukket strikk gir oss en rett linje. Hvis vi derimot legger strikken over en ball og trekker den ned på hver side av ballen, vil resultatet bli en slags tredelt kurve. Først en rett linje fra det ene endepunktet av strikken fram til ballen. Den neste delen langs med ballen, og den siste langs en rett linje fra ballen og til det andre endepunktet. I overgangen mellom ballen og de rette linjene vil strikken forlate ballen nøyaktig i det punktet der tangentlinjene til ballen er direkte rettet mot endepunktene.



Overskriften til denne teksten er Hindrings-problemet, og hindringen i dette tilfellet er ballen. Navnet henspeiler på at ballen hindrer strikken i å danne en rett linje mellom sine to endepunkter.

Selv om det er nokså intuitivt opplagt at den korteste veien mellom to punkter er den rette linja, er det faktisk mulig å føre et matematisk bevis for påstanden:

La $P$ og $Q$ være to punkter i planet, og la

$$C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

være en parametrisert kurve som forbinder de to punktene. Grunnleggende kalkulus sier at buelengden til kurven er gitt av integralet

$$\int_C \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_C \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Den korteste veien er derfor den minste verdien av dette integralet når $C$ gjennomløper mengden av alle kurver i planet som forbinder de to punktene $P$ og $Q$. Dette minimeringsproblemet løses ved å sette Lagrange-funksjonen

$$L(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$$

inn i den såkalte Euler-Lagrange-likningen. Det gir

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = -\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0$$

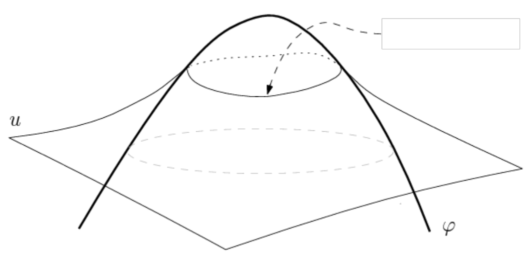
dvs. $\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$ for en konstant $C$. Hvis vi løser dette med hensyn på $y'$ får vi

$$y'(x) = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}$$

En funksjon med en konstant derivert er lineær, dvs. grafen er en rett linje.

Vi kan utvide problemet til et to-dimensjonalt problem ved å erstatte gummistrikken med en såpefilm opphengt på en ståltrådramme. Vi antar for orden skyld at såpefilmen aldri sprekker. Som ramme kan vi velge en hvilken som helst romkurve, og hindringen er som tidligere en ball. Såpefilmen har den samme egenskapen som gummistrikken, den ønsker seg av alt i verden å trekke seg mest mulig sammen, og vil derfor danne en flate med ståltråden som rand og med minimalt areal. For enkelte "pene" rammer lar dette problemet seg løses, med andre ord, vi kan finne en formel som beskriver flaten.

Ved å gjeninnføre hindringen, eller mer bokstavelig talt, skyve ballen opp mot såpefilmen, får vi et lignende problem som med gummistrikken. Den ytre kanten av såpefilmen er festet til rammen og i en del av den indre delen er det et område hvor filmen er i fullstendig kontakt med ballen. Dette området kaller vi kontaktflaten og yttergrensen til kontaktflaten omtales som den frie randen. Mellom kontaktflaten og rammen vil såpefilmen prøve å fullføre sitt ønske om å minimere arealet av flaten.




Dersom vi ikke har noen hindring og den ytre kanten er tilstrekkelig fin, vil det være mulig å finne en løsning på det minimale arealproblemet. Når vi setter inn hindringen har vi fortsatt et minimalt flateproblem, men nå har randen fått to komponenter. I tillegg til ytterkanten har vi den frie randen langs med kontaktflaten. En utfordring i forhold til å løse dette problemet er at denne frie randen på en måte ikke ligger fast. Hvis den var fast kunne vi ha mulighet til å løse likningen som gir oss det minimale arealet. Men den frie randen er en del av problemet, og vi ender opp med et koblet problem; Løsningen for det minimale arealet avhenger av formen på den frie randen, samtidig som formen på den frie randen avhenger av dannelsen av den minimale flaten. For å finne den samlede flaten må disse to problemstillingene løses simultant.

Luis Caffarelli har gitt viktige bidrag til hvordan løsningen av denne type koblede problemer kan beskrives, og til hvordan den frie randen kan se ut, eller kanskje heller hvordan den ikke kan se ut.

I begge de to tilfellene vi har beskrevet, den endimensjonale gummistrikken og den todimensjonale såpefilmen, sier kanskje intuisjonen vår at ytterkanten på kontaktflaten må være ganske jevn og fin. Hvis det hadde vært en skarp kant eller fold der, er en naturlig første tanke at elastisiteten i gummistrikken eller sammentrekkings-kreftene i såpefilmen vil strekke ut alle skarpe kanter. I dette til felle ligger intuisjonen nært opp ti sannheten.

Det sies ofte at en såpefilm er klokere enn en matematiker, siden såpefilmen umiddelbart beregner formen på den minimale flaten, mens matematikeren i beste fall kan finne løsningen etter timer med tungt arbeid. For hindrings-problemet har Caffarelli gjort dette tunge arbeidet en gang for alle, og bevist at randen til kontaktflaten faktisk vil være ganske jevn.

Den store vanskeligheten med å bevise et slikt resultat er mangelen på eksplisitt beskrivelse av denne frie randen. Hvordan kan man bevise noe om et objekt man ikke vet annet om enn at det eksisterer? Vel, det er en av grunnene til valget av Luis Caffarelli som vinner av Abelprisen for 2023, han var i stand til å gi et godt svar på denne tilsynelatende umulige oppgaven.

Selv om vi her har fokusert på gummistrikker og såpefilmer, er ikke Hindrings-problemet et isolert problem knyttet til rent geometriske betraktninger. Også innen så ulike fagområder som for eksempel væskefiltrering i porøse medier og finansiell matematikk kan vi finne igjen den samme problemstillingen.