



Michel Talagrand
Abelprisen 2024

Konsentrasjon av mål

En disk med radius 1 (enhetsdisk) kan beskrives som mengden av punkter (x, y) i planet som oppfyller $x^2 + y^2 \leq 1$. Arealet av enhetsdisken er π . Inne i enhetsdisken finner vi konsentriske disker av radius $1 - \epsilon$ for et vilkårlig lite positivt tall ϵ . Arealet til en slik indre disk er $\pi(1 - \epsilon)^2$ og arealet av det ringformede komplementet blir dermed $\pi(2\epsilon - \epsilon^2) \approx 2\pi\epsilon$. Som andel av det totale arealet til disken teller den indre disken for $\frac{\pi(1-\epsilon)^2}{\pi} = (1 - \epsilon)^2$. Hvis vi gjør samme type konstruksjon for en sfære, gitt ved $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, vil forholdet mellom volumet av den indre sfæren med radius $1 - \epsilon$ og enhetssfæren være $\frac{\frac{4}{3}\pi(1-\epsilon)^3}{\frac{4}{3}\pi} = (1 - \epsilon)^3$. For en 3-sfære med radius R og volum $\frac{1}{2}\pi^2 R^4$, er det tilsvarende forholdet $\frac{\frac{1}{2}\pi^2((1-\epsilon)R)^4}{\frac{1}{2}\pi^2 R^4} = (1 - \epsilon)^4$. For en d -sfære, gitt som

løsningene til ligningen $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{d+1}^2 = 1$ i \mathbb{R}^{d+1} , vil det tilsvarende forholdet være $(1 - \epsilon)^{d+1}$. Konsekvensen er at for en høydimensjonal sfære, hvor vi lar dimensjonen d vokse over alle grenser, så vil nesten hele volumet være konsentrert i et tynt skall.

På tilsvarende måte kan man vise at for høydimensjonale sfærer vil nesten hele overflaten være konsentrert i et lite belte rundt ekvator.

Et annet merkelig fenomen innen høydimensjonal geometri gjelder volumet til en d -sfære med radius 1. Volumet er proporsjonalt med $\pi^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$, som vokser uten noen grense når d øker.



En høy-dimensjonal løk har nesten hele volumet sitt i det ytterste skallet.
Kilde: frukt.no

I sin begrunnelse sier Abelkomiteen: "En av de røde trådene som går gjennom Talagrand's arbeider er å forstå geometriske egenskaper til høydimensjonale fenomener og å få dette til å utkrystallisere seg til skarpe estimater med brede anvendelsesområder." Eksemplet ovenfor med høy-dimensjonale sfærer går rett inn i kjernen av det som dette sitatet beskriver.

En mer generell beskrivelse av begrepet "konsentrasjon av mål" kan være følgende: Anta at vi har gitt et stort antall "fine" tilfeldige variabler, og betrakt summen av dem. Hvis de tilfeldige variablene er tilstrekkelig uavhengige, vil summen være konsentrert i et intervall som er mye smalere enn man kunne forvente.

