THE
ABEL
PRIZE

Masaki Kashiwara
Abelprisen 2025

Riemann-Hilbert-korrespondansen


David Hilbert (1862-1943)

Kilde: Wikipedia

Under den intenasjonale kongressen for matematikere i Paris i 1900 presenterte den tyske matematikeren David Hilbert en liste over 10 uløste matematiske problemer. Senere publiserte han skriftlig en utvidet liste med 23 problemer. Alle problemene var ansett for å være svært innflytelsesrike for det 20. århundres matematikk. Av problemene stå fortsatt noen åpne, mens andre er løst.

Hilberts 21. problem

Hilberts 21. problem, allerede inkludert i den første presentasjonen av 10 problemer, dreier seg om eksistensen av lineære differensialligninger med bestemte singulariteter og gitt monodromigruppe. I sin beskrivelse av problemet sier Hilbert at han antar at Bernhard Riemann var godt kjent med denne problemstillingen, noe som forklarer hvorfor problemet senere har blitt referert til som Riemann-Hilbert-problemet. Forsøk på å løse problemet har ført med seg oppdagelsen av flere 1-1-korrespondanser, kjent under fellesbetegnelsen Riemann-Hilbert-korrespondanser. En Riemann-Hilbert-korrespondanse etablerer en ekvivalens mellom ulike kategorier, og kan fortelle oss at det å lete etter løsninger på Riemann-Hilbert-problemet i en setting er vel så bra som å lete etter løsninger i en litt annen setting. Varianter av Riemann-Hilbert-problemet er med tiden blitt bevist, men den opprinnelige formen, slik Hilbert formulerte det, har vist seg å ikke være riktig.

Hilbert formulerte sitt 21. problem på følgende måte

”I teorien for lineære differensialligninger i en variabel z, vil jeg påpeke et viktig problem som sannsynligvis Riemann selv hadde i tankene. Problmet er som følger: Å vise at det alltid eksisterer en lineær differensialligning av den Fuchsiske klassen, med gitte singulariteter og monodromigruppe. Problemet innebærer å finne n regulære funksjoner, definert i hele det komplekse planet utenfor de singulære punktene og slik at funksjonene er uendelig av endelig orden i disse punktene. I tillegg kreves at dersom z gjennomløper en loop som omslutter noen av disse punktene, så skal funksjonene gjennomgå de forskrevne lineære substitusjonene, bestemt av monodromigruppa.”

Differensiallikninger

En differensialligning er en ligning som knytter sammen en funksjon og dens deriverte. Differensialligninger har blitt grundig studert siden det syttende århundre og de utgjør et viktig matematisk verktøy for å forstå fenomener i naturen. Eksempler på kjente differensialligninger er varmeligningen og bølgeligningen. Den første beskriver forplantningen av varme gjennom et materiale som utsettes for temperaturforskjeller, den andre beskriver hvordan bølger ruller over havet.

Ved å bruke grunnleggende naturlover og kunnskap om hvordan væsker oppfører seg, kan vi stille opp en differensialligning som beskriver hva som skjer i badekaret når vi fjerner proppen og slipper ut vannet. Løsningen av ligningen beskriver en virvlende bevegelse, ikke ulikt det som observeres i vannet. Forskjellen mellom den matematiske modellen, uttrykt ved differensialligningen, og den faktiske bevegelsen i vannet, tiltar jo nærmere sentrum i virvelen vi kommer. I badekaret er det ikke noe vann i det hele tatt i midten av virvelen, der har det allerede rent ut. I modellen vil imidlertid hastigheten på sirkulasjonen av vannet øke når vi nærmer oss sentrum. Helt i midten vill faktisk modellen kollapse i betydningen av at modellen har en singularitet i det sentrale punktet.

Monodromi - å snu løsningen opp-ned

Singulære punkter har ofte en interessant effekt på løsningene av differensialligningen. Fenomenet omtales gjerne som monodromi. Ordet monodromi er av gresk opprinnelse og betyr "å løpe rundt en gang". Anta at vi har funnet en løsning av differensialligningen. Verdien av funksjonen vil variere kontinuerlig langs vilkårlige kurver. Dersom vi beveger oss langs en lukket kurve vil verdien av funksjonen når vi kommer tilbake til utgangspunktet være den samme som da vi startet. dvs. så lenge vi ikke beveger oss langs en kurve som omslutter singulariteten. I så fall kan verdien av funksjonen endres. Det er dette som ligger i begrepet monodromi. Det er litt som bevegelser i en spiraltrapp. Så lenge den lukkede kurven ikke omslutter midten av trappen, vil vi holde oss på samme nivå, men dersom kurven går rundt midtaksen til trappen, vil vi ende opp på et annet nivå, enten ovenfor eller nedenfor.

Som et illustrerende eksempel kan vi se på differensiallikningen

$$z\frac{df}{dz} = \frac{1}{2}f$$

definert på det punkterte komplekse planet, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dersom vi setter $z = re^{i\theta}$ ser vi at

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

er en løsning av likningen på en liten sirkelskive med radius 0,99 sentrert i $z = 1$. Merk at valget av radius 0.99 er gjort i den hensikt å unngå singulariteten i origo. Vi kan nå stille opp 4 funksjoner $f_k(z) = f(z)$, $k = 0, 1, 2, 3$, hver av dem er definert på en sirkelskive med radius 0.99, og sentrert henholdsvis i 1, i, -1 og $-i$. Det betyr at skivene parvis overlapper og at funksjonsuttrykkene er like på overlappene. Samtidig har vi

$$f_3(1) = f_3(e^{2\pi i}) = e^{i\pi} = -1 \neq f_0(1)$$

som viser at løsningene av differensiallikningen har ikke-triviell monodromi.

Riemann-Hiilbert-korrespondansen

Differensialligninger kan ha forskjellige antall og typer av singulariteter, og også ulik monodromi. Dette var Hilbert veldig klar over. Det var det motsatte problemet han spekulerte i: Gitt monodromien og singularitetene, kan vi alltid finne en differensialligning hvor løsningen passer til disse dataene?

I løpet av det 20. århundre har det kommet mange svar på dette spørsmålet. Samtidig har problemet også blitt generalisert i ulike retninger. I den originale versjonen er problemet formulert på en Riemann-sfære. I en litt mer generell setting er Riemann-sfæren erstattet av en generell Riemann-flate, og ved å gå til høyere dimensjoner må vi vurdere enda mer generelle komplekse mangfoldigheter. Med større aksept for at differensiallikningen skal beskrive løsninger på et mye mer generelt rom, må også differensialligningen erstattes av mer generelle begrep, i dette tilfellet betyr det å studere konneksjoner på en mangfoldighet. Pierre Deligne ga et bevis for Riemann-Hilbert-korrespondansen for algebraiske konneksjoner med regulære singulariteter, noe som var en del av grunnlaget for at han fikk Abelprisen i 2013. Masaki Kashiwara ga tidlig på 80-tallet et bevis i en enda mer generell setting der Delignes konneksjoner erstattes av regulære holonomiske $\mathcal{D}$-moduler. Et alternativt bevis for Kashiwaras resultat ble uavhengig og omtrent samtidig presentert av Zoghman Mebkhout.

For å illustrere de mer generelle versjonene av Riemann-Hilbert-korrespondansen trenger vi mer avansert matematisk maskineri. La M være en differensiabel mangfoldighet. En funktor fra kategorien av vektorbunter på M med en flat konneksjon til kategorien av lokale systemer på M, er gitt ved

$$(V, \nabla) \mapsto V^{\nabla} = \mathrm{ker}(\nabla)$$

hvor V er vektorbunten og ∇ er den flate konneksjonen. Funktoren gir en ekvivalens av kategorier.

Det følgende eksemplet illustrerer denne versjonen av Riemann-Hilbert-korrespondansen. Vi betrakter den trivielle bunten $\mathcal{O}_X^2$ på $X = \mathbb{G}_m$ med konneksjon

$$\nabla \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\frac{dz}{z}$$

Kjernen til konneksjonen er løsningen til systemet

$$df_1 = 0$$
$$df_2 - f_1\frac{dz}{z} = 0$$

Det kan vises at løsningen er gitt ved

$$
\begin{aligned}
f_1 &= B \\
f_2 &= B \log z + A
\end{aligned}
$$

eller

$$
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ \log z \end{pmatrix}
$$

Dette er et eksempel på et lokalt system av rang 2 som gjennom Riemann-Hilbert-korrespondansen svarer til paret (V, ∇).

V kan merke oss at et lokalt system $\mathcal{L}$ på et topologisk rom X er det samme som et lokalkonstant knippe, dvs. et knippe hvor alle stilkene er isomorfe.

La $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ være avbildningen $P = z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}$, hvor $X = \mathbb{C}$ og $\mathcal{O}_X$ knippet av holomorfe funksjoner på X. Avbildningen P er nært forbundet med differensiallikningen

$$
z\frac{df}{dz} = \frac{1}{2}f
$$

definert over. Kjernen til P er gitt ved $f(z) = C\sqrt{z}$ for et vilkårlig kompleks tall C. For ethvert punkt $z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ er mengden av løsninger av likningen et 1-dimensjonalt rom. Dermed er kjernen $\mathcal{L} = \ker(P)$ lokalt konstant ($= \mathbb{C}$) på $X \setminus \{0\}$, men ikke på hele X ($f(0) = 0$).

La L betegne den lokalt konstante stilken i det lokalt konstante knippet $\mathcal{L}$. Monodromien til løsningene av likningen $P = 0$ vil gi en representasjon

$$
\pi_1(X, x) \longrightarrow \mathrm{Aut}(L)
$$

av fundamentalgruppa til X på automorfismengruppa til stilken L, kalt monodromi-representasjonen til stilken $\mathcal{L}$. Dette føyer enda en ekvivalens mellom kategorier til lista over Riemann-Hilbert-korrespondanser.