THE ABEL PRIZE

Masaki Kashiwara
Abelprisen 2025

«For fundamentale bidrag til algebraisk analyse»

Kilde: Kyoto Universitet

Masaki Kashiwara, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Universitet, Japan er tildelt Abelprisen for 2025,

«for sine fundamentale bidrag til algebraisk analyse og representasjonsteori, og spesielt for utviklingen av teorien for $\mathcal{D}$-moduler og oppdagelsen av krystallbasiser.»

$\mathcal{D}$ for differensial

Abelkomiteen sier i sin begrunnelse for tildelingen av årets Abelpris: «$\mathcal{D}$-moduler danner et algebraisk verktøy for å studere lineære systemer av partielle differensialligninger. I masteroppgaven sin fra 1970 utviklet Kashiwara teorien for analytiske $\mathcal{D}$-moduler. Han introduserte begrepet karakteristisk varietet og beviste en kraftfull generalisering av Cauchy-Kovalevskaya-teoremet. Arbeidene ga et tidlig signal om styrken i å benytte algebraiske metoder til å takle problemer hentet fra analyse.»

Airy-likningen har sitt navn etter astronomen Sir George Biddell Airy (1801–1892). Airy-likningen er en ordinær differensiallikning;

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$$

med mange viktige anvendelser. Det er kjent at likningen har to lineært uavhengige ikke-elementære løsninger, som med et lite matematisk-humoristisk tilsnitt har fått navnene Airy- og Bairy-funksjonene. Airy-likningen kan på en enkel måte oversettes til et system av lineære partielle differensiallikninger via $\mathcal{D}$-modul-formalismen. Et sentralt begrep i denne formalismen er Weyl-algebraen

$$W = \mathbb{R}\langle x, y\rangle/(xy - yx + 1)$$

i to ikke-kommuterende variabler x og y, oppkalt etter den tyske matematikeren Hermann Weyl (1885–1955). Weyl-algebraen ble introdusert som et matematisk verktøy for å beskrive uskarphetsrelasjonen, et sentralt begrep innen kvantemekanikk. En $\mathcal{D}$-modul M er i praksis en W-modul dvs. et vektorrom over $\mathbb{R}$ med en virkning av Weyl-algebraen.

Polynomringen $M = \mathbb{R}[x]$ i en variabel over de reelle tallene har en naturlig struktur som $\mathcal{D}$-modul. De to variablene spiller litt ulik rolle; der x virker på M ved vanlig multiplikasjon, er virkningen av y mer å betrakte som en derivasjonsoperator. Vi kunne slik sett heller ha brukt notasjonen $y = \frac{d}{dx}$ og vi har da

$$y \cdot f(x) = f'(x)$$

Relasjonen $xy - yx + 1 = 0$ reflekterer nøyaktig produktregelen for derivasjon, også kalt Leibniz´ regel. Dette kan vi forsikre oss om ved å se på virkningen på et vilkårlig polynom $f(x)$. Ved å substituere $y = \frac{d}{dx}$ ser vi direkte at relasjonen

$$\frac{d}{dx}xf(x) = x\frac{d}{dx}f(x) + f(x)$$

gir oss produktregelen for derivasjon.

Som et neste skritt gjør vi om Airy-likningen til en W-lineær operator

$$\phi : W^2 \to W^2$$

gitt ved

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y & -1 \\ -x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

La V være kokjernen til avbildningen ϕ.

En løsning av Airy-likningen i polynomringen $\mathbb{R}[x]$ er det samme som et element i $\mathrm{Hom}_W(V, \mathbb{R}[x])$, dvs. en vektor $(f, g) \in \mathbb{R}[x]^2$ slik at

$$\begin{pmatrix} y & -1 \\ -x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som betyr at $g = yf = f'$ og

$$yg - xf = g' - xf = f'' - xf = 0$$

Den siste likheten svarer akkurat til den opprinnelige formen på Airy-likningen. Eksemplet viser hvordan et problem innen analyse oversettes til en algebraisk kontekst gjennom å bruke $\mathcal{D}$-modul-formalismen.

Kashiwara har også brukt $\mathcal{D}$-moduler til å løse andre matematiske problemer, og Abelkomiteen trekker spesielt fram disse resultatene:

«Kashiwara formulerte en generalisert versjon av Riemann-Hilbert-korrespondansen, og beviste ekvivalensen mellom kategorien av regulære holonome $\mathcal{D}$-moduler og kategorien av perverse knipper (et annet bevis ble samtidig og uavhengig presentert av Zoghman Mebkhout).»

«Kazhdan-Lusztig-formodningen i representasjonsteori kan betraktes som en sammenheng mellom karakterer for representasjoner og interseksjonskohomologiske grupper. Sammenhengen ble bevist av Kashiwara sammen med Jean-Luc Brylinski som en smart anvendelse av Riemann-Hilbert-korrespondanen.»

Praktfulle krystaller

I tillegg til $\mathcal{D}$-modulene, trekker Abelkomiteen også fram krystallbasene som en sentral del av den matematiske arven etter Kashiwara: «Inspirert av modeller fra matematisk fysikk formaliserte Vladimir Drinfeld og Michio Jimbo uavhengig av hverandre begrepet kvantegrupper mot slutten av 1980-tallet. Kvantegrupper er deformasjoner av ide universelle nnhyllingsalgebraene til komplekse semi-simple eller Kac-Moody Lie-algebraer. Kashiwara introduserte begrepet krystallbase og beviste eksistens av krystallbaser for integrable høyeste vekt-representasjoner av kvantegrupper.»

Lie-algebraer er oppkalt etter den berømte matematikeren fra Nordfjordeid, Sophus Lie (1842-1899). Inspirert av Niels Henrik Abels ideer rundt symmetrier av algebraiske ligninger, studerte Lie kontinuerlige symmetrier av differensialligninger, gjennom det han kalte transformasjonsgrupper. I dag blir disse gruppene bare omtalt som Lie-grupper. Et eksempel på en Lie-gruppe er SL_2, dvs. mengden av 2×2-matriser med determinant 1 over en passende grunnkropp. Mengden har en gruppestruktur, som i hovedtrekk betyr at vi kan multiplisere matriser med determinant 1 og fortsatt ha determinant 1 for produktet. Samtidig er SL_2 rommet som består av alle 4-tupler $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ hvor $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$. Dette definerer en 3-dimensjonal mangfoldighet. Så en Lie gruppe er både en gruppe og en mangfoldighet og de to strukturene er nøye tilpasset hverandre.

Til enhver Lie-gruppe er det knyttet en Lie-algebra, som essensielt beskriver tangentstrukturen til Lie-gruppa. For SL_2 kalles den tilhørende Lie-algebraen $\mathfrak{sl}_2$, og den er gitt ved

$$\mathfrak{sl}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, a_{11} + a_{22} = 0 \right\}$$

En viktig del av strukturen til en Lie-algebra er Lie-produktet $[-,-] : \mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{sl}_2$. Den abstrakte definisjonen av dette produktet er modellert over kommutatoren $[a, b] = ab - ba$. Lie-produktet oppfyller betingelsene $[a, a] = 0$, $[a, b] = -[b, a]$ og en tredje likhet som kalles Jacobi-identiteten. Dette svarer akkurat til egenskapene til kommutatoren $[a, b] = ab - ba$. Lie-algebraen $\mathfrak{sl}_2$ er et 3-dimensjonalt vektorrom, men for å beskrive den som en Lie-algebra trenger vi kun to generatorer. La

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = [e, f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De tre elementene $\{e, f, h\}$ danner en basis for det underliggende vektorrommet, men for Lie-algebraen, hvor Lie-produktet er innebakt i definisjonen, holder det med de to generatorene e og f.

Til hver Lie-algebra $\mathfrak{g}$ tilordner vi en ring, den såkalte universelle innhyllingsalgebraen $U(\mathfrak{g})$. I den universelle innhyllingsalgebraen legger vi inn multiplikasjon som en del av strukturen. Multiplikasjonen er konsistent med Lie-produktet i betydningen at $[e, f] = ef - fe$. Den universelle innhyllingsalgebraen bærer med seg nøyaktig den samme informasjonen som Lie-algebraen, men den ekstra multiplikative strukturen øker fleksibiliteten i håndetringen av objektene.

Den universelle innhyllingsalgebraen $U(\mathfrak{g})$ inneholder noen «gjemte» hemmeligheter. For å avdekke disse hemmelighetene setter vi den universelle innhyllingsalgebraen inn i en mer generell struktur som vi kaller kvantegrupper, symbolisert ved $U_q(\mathfrak{g})$. En sentral del av kvantegruppene er parameteren q. Dersom denne settes til $q = 1$ får vi tilbake den opprinnelige universelle innhyllingsalgebraen $U(\mathfrak{g})$. Litt tabloid kan vi si at de gjemte hemmelighetene vi leter etter finnes i $U_q(\mathfrak{g})$ og må forstås i $U(\mathfrak{g})$ ved å studere hva som skjer når $q \to 1$. Symbolet q spiller en sentral rolle i kvantiseringsprosessen. Den har samme posisjon i den matematiske konteksten som Plancks konstant $\hbar$ har i kvantemekanikken.

I motsetning til den universelle innhyllingsalgebraen $U(\mathfrak{sl}_2)$ er ikke kvantegruppen $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ noen Lie-algebra, men snarere det som i matematisk litteratur kalles en Hopf-algebra. Den har to generatorer t, t^{-1} i tillegg til e og f og generatorene oppfyller relasjonene:

$$\begin{aligned} tet^{-1} &= q^2 e \\ tft^{-1} &= q^{-2} f \\ [e, f] &= \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}} \end{aligned}$$

Dersom vi i dette oppsettet lar $t = q^h$ og bruker tilnærmingen $e^x \approx 1 + x$, for så å ta grensen $h \to 0$ (dvs. $q \to 1$) så vil disse relasjonene gå over til relasjonene i den opprinnelige Lie-algebraen.

$$[h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f \qquad [e, f] = h$$

Et generelt verktøy for å studere intrikate strukturer som kvantegrupper $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ er å studere representasjoner av objektene. Ideen med en representasjon av en kvantegruppe er å ersatte elementer i kvantegruppen med matriser. Representasjonen trenger ikke å være trofaste, noe som betyr at flere elementer kan erstattes av samme matrise. Men uansett vil representasjonene illustrere strukturen eller i det minste deler av strukturen til objektet den representerer.

Det har vært en stående, langvarig utfordring å finne passende basiser for representasjoner av Lie-algebraer. Basisene bør være egnet for formålet, i betydningen av at de er lette å håndtere og at de speiler de interessante og kanskje til og med de godt gjemte egenskapene til Lie-algebraen. I en artikkel fra 1990 presenterte Kashiwara en metode for å finne en basis for en representasjon,en basis som fikk det vel-klingende navnet krystallbase. Konstruksjonen går via en passende basis for en representasjon av den tilhørende kvantegruppa. Når vi lar $q \to 1$ gir basisen, pr. konstruksjon, også en basis for representasjonen ved $q = 1$, dvs. for en en representasjon av Lie-algebraen $\mathfrak{sl}_2$. Resultatet til Kashiwara sikrer at slike basiser eksisterer, og at de har de rette egenskapene. Som en bonus har de konstruerte basisene en kombinatorisk beskrivelse, bygget over det som kalles Young-diagrammer, et konsept introdusert av Cambridge-matematikeren Alfred Young allerede i 1900. Summen av alle disse positive egenskapen har medført at krystallbaser over tid har blitt stadig mer populære og nyttige som verktøy for videre utvikling av teorien.