THE ABEL PRIZE

Masaki Kashiwara
Abelprisen 2025

Krystallbasiser

Abelkomiteen sier i sin begrunnelse for tildelingen av årets Abelpris: «Inspirert av modeller fra matematisk fysikk formaliserte Vladimir Drinfeld og Michio Jimbo uavhengig av hverandre begrepet kvantegrupper mot slutten av 1980-tallet. Kvantegrupper er deformasjoner av universelle innhyllingsalgebraer til komplekse semi-simple eller Kac-Moody Lie-algebraer. Kashiwara introduserte begrepet krystallbasis og beviste eksistens av krystallbasiser for integrable høyeste vekt-representasjoner av kvantegrupper. Beviset bygger på et intrikat induksjonsargument som ikke har blitt nevneverdig forenklet med årene.

Kashiwara generaliserte krystallbasisene til såkalte globale basiser. Disse var, uavhengige av Kashiwaras arbeider, beskrevet av George Lusztig under betegnelsen kanoniske basiser. Arbeidet kan betraktes som en storslagen og fruktbar generalisering av teorien for Young-diagrammer og Young-tablåer.»

Kvantegruppen $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Vi betrakter vektorrommet av 2×2-matriser med spor 0 over en passende grunnkropp K, dvs. mengden

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \mid a_{11} + a_{22} = 0 \right\}$$

med basis

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sporet til en 2×2-matrise a er som vi ser, summen av diagonalelementene, $\mathrm{tr}(a) = a_{11} + a_{22}$. Produktet ab av to matriser a og b med spor 0 vil normalt ikke ha spor 0. Derimot vil kommutator-produktet $[a, b] = ab - ba$ alltid ha spor 0 siden $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$.

Vektorrommet generert av e, f og h av matriser med spor 0 er derfor lukket under kommutator-produktet. Vektorrom med denne egenskapen kalles Lie-algebraer, oppkalt etter den norske matematikeren Sophus Lie (1842-1899). Lie-algebraen med det underliggende vektorrommet generert av $\{e, f, h\}$ kalles $\mathfrak{sl}_2$. Lie-algebraen beskriver tangentrommet til den spesielle lineære gruppen, dvs. mengden av alle 2×2-matriser med determinant 1.

Til en Lie-algebra $\mathfrak{g}$ kan vi tilordne en ring, den såkalte universelle innhyllingsalgebraen $U(\mathfrak{g})$ til Lie-algebraen. I tillegg til Lie-algebra-strukturen er den universelle innhyllingsalgebraen utstyrt med en multiplikasjon. Multiplikasjonen er konsistent med Lie-produktet i betydningen at $[e, f] = ef - fe$. Den universelle innhyllingsalgebraen inneholder den samme «informasjonen» som Lie-algebraen, men den ekstra multiplikative strukturen øker fleksibiliteten i håndetringen av objektene.

En kvantegruppe er en «deformasjon» av den universelle innhyllingsalgebraen, vi bruker notasjonen $U_q(\mathfrak{g})$. Indeksen q parametriserer deformasjonene og verdien $q = 1$ svarer til den opprinnelige universelle innhyllingsalgebraen. Kvantegruppen $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ er generert av generatorene e og f for den universelle innhyllingsalgebraen $U(\mathfrak{g})$, og i tillegg en generator t og dens invers t^{-1}. Generatorene tilfredsstiller følgende relasjoner:

$$tet^{-1} = q^2 e$$
$$tft^{-1} = q^{-2} f$$
$$[e,f] = \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}}$$

Ved å substituere $t = q^h$ og la $q \to 1$, vil relasjonene ovenfor endres til de ordinære relasjonene for Lie-algebraen $\mathfrak{sl}_2$:

$$[h,e] = 2e, \qquad [h,f] = -2f \qquad [e,f] = h$$

Dette framkommer ved å linearisere eksponentialfunksjonen.

Krystallbasis-teoremet

La $K = \mathbb{Q}(q)$ være mengden av rasjonelle funksjoner $\frac{f(q)}{g(q)}$, der f og g er polynomer i en variabel q, og la V være et K-vektorrom. La A være ringen av rasjonelle funksjoner i q hvor nevneren g oppfyller $g(0) \neq 0$. En fri A-modul L slik at $K \otimes_A L \simeq V$ kalles et gitter for V.

La M være en integrabel $U_q(\mathfrak{sl})$-modul, dvs. en modul M som tillater en dekomposisjon som en sum av egenrom for operatoren $t \in U_q(\mathfrak{sl})$.

En krystallbasis på M er et par (L, B) der L er et gitter for M og B er en basis for $\mathbb{Q}$-vektorrommet L/qL hvor vi har satt $q = 0$. Videre krever vi at L og B dekomponerer på samme måte som M og slik at L og B begge respekteres av Kashiwara-operatørene $\tilde{e}$ og $\tilde{f}$. Kashiwara-operatorene $\tilde{e}$ og $\tilde{f}$ er operatorer som er konstruert i nært slektskap med generatorene e og f Den siste egenskapen som definerer en krystallbasis er at for $u, v \in B$, så er $u = \tilde{e}v$ hvis og bare hvis $v = \tilde{f}u$.

Kashiwaras teorem sier at enhver integrabel U_q-modul har en krystallbasis.

Vi kan illustrere teoremet ved å se på et par eksempel.

En 2-dimensjonal representasjon $V = K^2$ av $U_q(\mathfrak{sl})$ med basis $\{v_1, v_{-1}\}$ over $K = \mathbb{Q}(q)$ er gitt ved

$$e \cdot v_1 = 0 \quad f \cdot v_1 = v_{-1} \quad t^{\pm 1} \cdot v_1 = q^{\pm 1} v_1$$

$$e \cdot v_{-1} = v_1 \quad f \cdot v_{-1} = 0 \quad t^{\pm 1} \cdot v_{-1} = q^{\mp 1} v_{-1}$$

Relativt til basisen $\{v_1, v_{-1}\}$ er virkningen av $U_q(\mathfrak{sl})$ gitt ved

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

som viser at representasjonen respekterer relasjonene til generatorene i $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Basisen $\{v_1, v_{-1}\}$ tilfredsstiller alle krav til å være en krystallbasis. En kombinatorisk illustrasjon av basisen er gitt ved grafen

$$v_1 \rightleftarrows v_{-1}$$

hvor pilene som peker mot høyre representerer $\tilde{f}$ og pilene som peker mot venstre representerer $\tilde{e}$.

For å studere de dypere detaljene ved Kashiwaras arbeid med krystallbasiser må vi se på et litt mer utdypende eksempel. Så vi betrakter $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-modulen $W = V \otimes V$ hvor V er som over.

En basis for W som et vektorrom over K er gitt ved

$$\{v_1 \otimes v_1, v_{-1} \otimes v_1, v_1 \otimes v_{-1}, v_{-1} \otimes v_{-1}\}$$

Virkningen av $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ på W er bestemt av koproduktet $\Delta : U_q(\mathfrak{sl}_2) \to U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$, definert på basiselementene ved

$$\Delta(e) = e \otimes t^{-1} + 1 \otimes e$$
$$\Delta(f) = f \otimes 1 + t \otimes f$$
$$\Delta(t^{\pm 1}) = t^{\pm 1} \otimes t^{\pm 1}$$

Tabellen gir detaljene for hvordan e, f og t opererer på basiselementene:

	e	f	t
$v_1 \otimes v_1$	0	$v_{-1} \otimes v_1$ $+ q v_1 \otimes v_{-1}$	$q^2 v_1 \otimes v_1$
$v_1 \otimes v_{-1}$	$v_1 \otimes v_1$	$v_{-1} \otimes v_{-1}$	$v_1 \otimes v_{-1}$
$v_{-1} \otimes v_1$	$q^{-1} v_1 \otimes v_1$	$q^{-1} v_{-1} \otimes v_{-1}$	$v_{-1} \otimes v_1$
$v_{-1} \otimes v_{-1}$	$q v_1 \otimes v_{-1}$ $+ v_{-1} \otimes v_1$	0	$q^{-2} v_{-1} \otimes v_{-1}$

Basisen har noen gode egenskaper, men noe vesentlig mangler, f.eks. er det et problem med å la $q \to 0$.

Vi må derfor modifisere basisen. La

$$u_0 = q v_{-1} \otimes v_1 - v_1 \otimes v_{-1}$$
$$u_1 = v_1 \otimes v_1$$

En enkel regning viser at $e \cdot u_0 = e \cdot u_1 = 0$, og u_0 og u_1 er egenvektorer for t med vekt (egenverdi) henholdsvis 1 og q^2. Videre har vi at

$$f \cdot u_0 = 0, \quad f \cdot u_1 = v_{-1} \otimes v_1 + q v_1 \otimes v_{-1}$$

og $f \cdot u_1$ er en egenvektor for t med vekt 1. Ved å iterere virkningen av f får vi et nytt element

$$f^{(2)} \cdot u_1 = \frac{1}{q + q^{-1}} f^2 \cdot u_1 = v_{-1} \otimes v_{-1}$$

med vekt q^{-2}. Det betyr at vi kan «vekt-dekomponere» W i en sum av egenrom for operatoren t ved

$$W = W(q^{-2}) \oplus W(0) \oplus W(q^2)$$

hvor $W(q^{-2})$ har rang 1, generert av $f^{(2)} \cdot u_1$, $W(0)$ har rang 2, med generatorer u_0 og $f \cdot u_1$ og til slutt den høyeste vekt-modulen $W(q^2)$ av rang 1 generert av u_1. En utregning viser at

$$\begin{aligned}
v_1 \otimes v_1 &= u_1 \\
v_{-1} \otimes v_1 &= \frac{q}{q^2+1} u_0 + \frac{1}{q^2+1} f \cdot u_1 \\
v_1 \otimes v_{-1} &= -\frac{1}{q^2+1} u_0 + \frac{q}{q^2+1} f \cdot u_1 \\
v_{-1} \otimes v_{-1} &= f^{(2)} \cdot u_1
\end{aligned}$$

og

$$\mathcal{B} = \{u_0, u_1, u_2 = f \cdot u_1, u_3 = f^{(2)} \cdot u_1\}$$

er også en basis for W. Og denne basisen er helt perfekt. Den er laget av egenvektorer for t, vi kan enkelt la $q \to 0$ og få en basis for et 4-dimensjonalt vektorrom over $\mathbb{Q}$, og den har de rette egenskapene med hensyn til virkningen av Kashiwara-operatorene $\tilde{e}$ og $\tilde{f}$. Kashiwara-operatorene virker på basisen $\mathcal{B}$ ved

$$\tilde{e}(u_0) = \tilde{e}(u_1) = 0, \quad \tilde{e}(u_2) = u_1, \quad \tilde{e}(u_3) = u_2$$

$$\tilde{f}(u_0) = \tilde{e}(u_3) = 0, \quad \tilde{e}(u_1) = u_2, \quad \tilde{e}(u_2) = u_3$$

Basisen $\mathcal{B}$ tilfredsstiller alle kravene til en krystallbasis, og kombinatorikken i basisen kan illustreres med grafen

$$u_1 \longleftrightarrow u_2 \longleftrightarrow u_3$$

i tillegg til den enslige noden u_0. Pilene som peker mot høyre representerer $\tilde{f}$ og pilene som peker mot venstre representerer $\tilde{e}$. De to komponentene til grafen illustrerer at W er bygget opp av to irredusible representasjoner en 3-dimensional generert av u_1, u_2 og u_3, og en 1-dimensjonal generert av u_0.