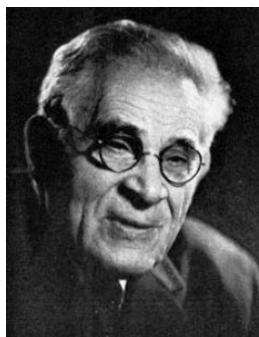




THE
ABEL
PRIZE

Gerd Faltings Abelprisvinner 2026

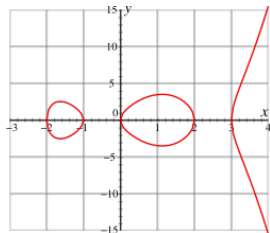
Faltings' teorem



Louis Mordell,
1888-1972

(Foto: Universitetet i Manchester)

I 1922 beviste Louis Joel Mordell at de rasjonale løsningene av en kubisk likning definert over $\mathbb{Q}$ danner en endelig generert abelsk gruppe. I samme artikkel bemerket han at for kurver av høyere genus kan det bare være endelig mange rasjonale punkter. I flere ti år var denne påstanden kjent som Mordell-formodningen. Det var ikke før på midten av 1980-tallet at formodningen endelig ble bevist. I artikkelen "Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern" publisert i *Inventiones Mathematicae* i 1983 beviste Gerd Faltings formodningen og gjorde om Mordell-formodningen til Faltings' teorem.



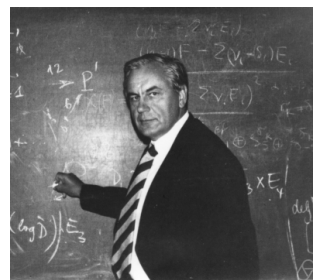
Et eksempel på en genus 2-
kurve. Kurven er gitt ved
nullpunktsmengden til likningen

$$y^2 = x(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$$

Den generelle formen på Faltings' teorem er som følger;
La C være en glatt, projektiv kurve av genus $g \geq 2$ definert

over en tallkropp K . Da er mengden $C(K)$ av K -punkter på C endelig.

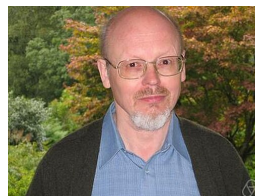
En viktig del av Faltings' bevis for Mordell-formodningen er beviset for Shafarevich-formodningen. Shafarevich-formodningen ble gitt av den sovjetiske matematikeren Igor Shafarevich på den internasjonale kongressen for matematikere i Stockholm i 1962. Han hevdet at det bare finnes endelig mange isomorfiklasser av abelske mangfoldigheter av gitt dimensjon, med gitt polarisasjonsgrad og definert over en kropp med god reduksjon utenfor en endelig mengde av plasser.



Igor Shafarevich
1923-2017

(Foto: Konrad Jacobs, Erlangen)

Anta for anledningen at Shafarevich-formodningen er bevist. La C være en kurve over K og la P være et K -punkt på C . Den russiske matematikeren Aleksei Parshin viste i sin doktoravhandling fra 1968 hvordan man kan finne en overdekning $C_P \rightarrow C$ av begrenset genus og ramifisert kun over P . Et klassisk resultat av den italienske matematikeren Michele of de Franchis fra 1913 sier at det finnes kun endelig mange



Aleksei Parshin
1942-2022

(Foto: Wikipedia)



slike avbildninger $C_p \rightarrow C$ for gitte C_p og C når C har genus større enn eller lik 2.

Ved Shafarevich-formodningen finnes det bare endelig mange kurver C_p . Følgelig må antallet K -punkter på C også være endelig. Denne sammenhengen mellom Shafarevich- og Mordell-formodningene er kjent som Parshins triks. Med Parshins triks for hånden reduseres beviset for Mordell-formodningen til et bevis for Shafarevich-formodningen.

En abelsk mangfoldighet er en algebraisk mangfoldighet som også er en abelsk gruppe, og de to strukturene er tett sammenvevd. Abelske kurver, dvs. abelske mangfoldigheter av dimensjon 1, kalles elliptiske kurver.

En isogeni mellom to abelske mangfoldigheter E_1 og E_2 av samme dimensjon over en kropp k er en tett avbildning $f: E_1 \rightarrow E_2$ som avbilder identiteten i E_1 på identiteten i E_2 . Alternativt kan avbildningen defineres som en surjektiv gruppehomomorfi med endelig kjerne.

Det som gjenstår i Faltings argumentasjonsrekke er et bevis for Shafarevich-formodningen, dvs. å vise at det bare finnes endelig mange isomorfiklasser av abelske mangfoldigheter av gitt dimensjon, med gitt polarisasjonsgrad og definert over en kropp med god reduksjon utenfor en endelig mengde av plasser.

Den andre halvdel av utsagnet, som angår polarisering og reduksjon, er en viktig del av formodningen, men for å se det store bildet holder det å fokusere på det at det kun er endelig mange klasser av abelske mangfoldigheter.

En sentral ide hos Faltings er et nytt begrep for høyde av en abelsk mangfoldighet. Konstruksjonen er teknisk komplisert, men konsekvensen er viktig. Faltings viser at hvis man krever begrenset høyde, er mengden av abelske mangfoldigheter endelig. Han viser også at høyden er begrenset internt i en isogeniklasse.

Ved å kombinere de to resultatene følger det at for en abelsk mangfoldighet A så finnes det bare et endelig antall isomorfiklasser av abelske mangfoldigheter som er isogene med A .

For en abelsk gruppe A og et primtall p defineres den p -adiske Tatemodulen til A , oppkalt etter vinneren av Abelprisen 2010, John Torrence Tate Jr., som den inverse grensen

$$T_p(A) = \varprojlim A[p^n]$$

hvor $A[p^n]$ er p^n -torsjon i A , dvs. kjernen til avbildningen gitt ved multiplikasjon med p^n og den inverse grensen beregnes over det inverse systemet gitt ved multiplikasjon med p ; $A[p^{n+1}] \rightarrow A[p^n]$. Det betyr at Tatemodulen til A koder p -torsjon i gruppa.

La K være en kropp av karakteristikk $\text{char}(K) \neq p$, og A og B to abelske mangfoldigheter over K . Tate-formodningen, bevist for endelige kroppar av Tate i 1966 og for tallkropper av Faltings i 1983, etablerer en isomorfi

$$\text{Hom}_K(A, B) \otimes \mathbb{Z}_p \simeq \text{Hom}_{G_K}(T_p(A), T_p(B))$$

hvor $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$.

Det gjenstående trinnet i det store bildet av beviset for Shafarevich-formodningen er å vise at det bare finnes endelig mange isogeniklasser av abelske mangfoldigheter. Det springende punktet ligger i Tate-formodningen, som Faltings beviste for tallkropper. Tate-formodningen gir en korrespondanse mellom isogenier av A og G -representasjoner av den ℓ -adiske Tate-modulen av A . Endeligheten av mengden av isogenier tilsvarer at virkningen av G på Tate-modulen er semisimpel, og ved å kombinere noen klassiske resultater for representasjoner, viste Faltings at antallet isogeniklasser, og også antallet isomorfiklasser, av abelske mangfoldigheter med god reduksjon utenfor en endelig mengde av plasser i K er endelig, og Shafarevich-formodningen er dermed bevist.



Gerd Faltings i 2005
(Foto: Renate Schmind, MFO)