



THE
ABEL
PRIZE

Gerd Faltings
Abelprisvinner 2026

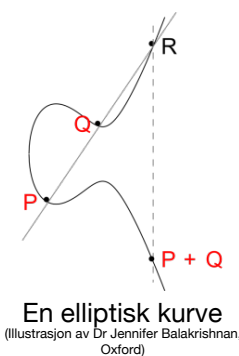
Fra Mordells formodning til Faltings teorem

I et historisk perspektiv er matematisk vitenskap tuftet på to grunnpilarer: tallteori og geometri. Kjernen i tallteori er de naturlige tallene og deres utvidelse til de rasjonale tallene. På barneskolen lærer barn om addisjon og multiplikasjon, og sammenhengen mellom dem; multiplikasjon kan betraktes som gjentatt addisjon. Men denne litt naive tilnærmingen avslører ikke den mer mystiske siden ved tallene. Et eksempel på hvordan det å kombinere addisjon og multiplikasjon kan føre til vanskelige problemer, er det klassiske spørsmålet om hvorvidt det er mulig å legge sammen to kvadrater og få et kvadrat som svar. Dette spørsmålet er nært knyttet til Pythagoras læresetning, som gir en enkel sammenheng mellom (kvadratene av) sidene i en rettvinklet trekant. Det tallteoretiske spørsmålet bak læresetningen gjelder heltallsløsninger (a, b, c) av ligningen $a^2 + b^2 = c^2$, ofte betegnet som pythagorasiske tripler.

Det har vært kjent siden antikken at det finnes uendelig mange pytagoreiske tripler. Det enkleste eksemplet gjenspeiles i den såklare snekker-trekanten. Senkker-trekanten er en rettvinklet trekant med sidelengder 3, 4 og 5. Siden vi har at $3^2 + 4^2 = 5^2$, så vil den ene vinklene i denne trekanten være rett, og vi kan utnytte dette til å passe på at hjørnene i huset er rettvinklede. En sannsynlighetsbasert forklaring på eksistensen av uendelig mange pytagoreiske tripler er at antallet perfekte kvadrater er en tilstrekkelig tett delmengde av de naturlige tallene. Dermed har mengden av naturlige

tall som er en sum av to kvadrater og mengden av kvadrater uendelig overlapp.

Går vi videre til kubikk-tallene, så vil frekvensen av slike tall innenfor mengden av naturlige tall være langt mer glissen enn mengden av kvadrater, og det er ikke åpenbart at det analoge problemet med å finne pytagoreiske tripler nå har noen positiv løsning. Faktisk er det, i følge Fermats siste teorem, ikke mulig i det hele tatt. Dette ble bevist av britten Andrew Wiles, et resultat han fikk Abelprisen for i 2016. Fermats siste teorem gjelder heltallsløsninger av ligningen $x^d + y^d = z^d$ for $d \geq 3$ og Wiles beviste at det ikke finnes ikke-trivielle heltallsløsninger av denne likningen. Mordells formodning fra 1922 antyder at for alle høygradsligninger av en viss form, har ligningen bare endelig mange rasjonale løsninger.

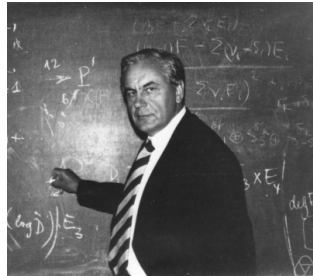


endelig antall rasjonale punkter på en kurve av genus ≥ 2 . Mordell selv var bare i stand til å bevise et litt mindre strengt

Løsningen av en ligning av grad 3 har en geometrisk tolkning som punktene på en elliptisk kurve. En elliptisk kurve har genus 1, som refererer til en viss egenskap ved kurvens form. Kurver av genus ≥ 2 er geometrisk mer komplekse og definert av ligninger av enda høyere grad. Blant punktene på en kurve kan det være noen der koordinatene er rasjonale tall, referert til som rasjonale punkter. Mordell-formodningen sier at det bare er et

resultat; at det kan være uendelig mange rasjonale punkter på en elliptisk kurve, men bare et endelig antall av dem er nødvendig for å konstruere resten. Konstruksjonen refererer til det faktum at elliptiske kurver er utstyrt med en naturlig addisjonsoperasjon, som gjør mengden av punkter på kurven til det matematikere kaller en abelsk gruppe. Abelske grupper er oppkalt etter Niels Henrik Abel, som Abelprisen har fått navnet sitt fra.

Mordell-formodningen for kurver av genus ≥ 2 forble ubevist i mer enn 60 år. I løpet av denne perioden ble det etablert noen resultater med forbindelser til formodningen, blant dem en formodning av Shafarevich angående endeligheten til en familie av kurver. Gjennom et resultat referert til som Parshins triks er det en nær forbindelse mellom den ovennevnte familien av kurver



Igor Shafarevich
(foto: Konrad Jacobs, Erlangen)

og en kurve som ligger under den familien. Tidlig på 80-tallet var det kjent at et bevis for Shafarevich-formodningen automatisk ville gi et bevis for Mordell-formodningen.

I 1983 lyktes Gerd Faltings med å bevise Shafarevich-formodningen. Et viktig grep i beviset hans er introduksjonen av det som nå kalles Faltings-høyden til en kurve. Faltings viser et endelighetsresultat for antallet bestemte kurver med begrenset Faltings-høyde og også et begrensethetsresultat for selve Faltings-høyden. Ved å kombinere de to oppnås et endelighetsresultat for antallet kurver det gjelder, og dermed følger Shafarevich-formodningen. Ved å bruke Parshins triks følger det at Mordell-formodningen ikke lenger er en formodning, men nå et resultat kalt Faltings teorem.

