



Gauge-teori

Gauge-teori som matematisk disiplin ble introdusert av Hermann Weyl i 1918. Weyl hadde studert Einsteins generelle relativitetsteori og tenkt nøye over den matematiske bakgrunnen for teorien. En grunnleggende ide i Einsteins arbeid er at fysiske lover skal gjelde uavhengig av valg av referansesystem. Dette ble også den grunnleggende ideen i gauge-teori, å finne måter å sammenlikne målinger gjort i ulike referansesystemer og lete etter størrelser som har den nødvendige universelle utformingen. Den fysiske tolkningen ble bragt videre av Yang og Mills på femtitallet, gjennom det som nå bare blir kalt Yang-Mills-likninger.

For å komme under huden på teoretisk fysikk må du akseptere å jobbe i et (minst) 4-dimensjonalt rom, med 3 rom-koordinater og en tids-koordinat. En fysisk lov må være den samme uansett hvor du befinner deg i tid-rommet, altså uavhengig av valg av referansesystem.



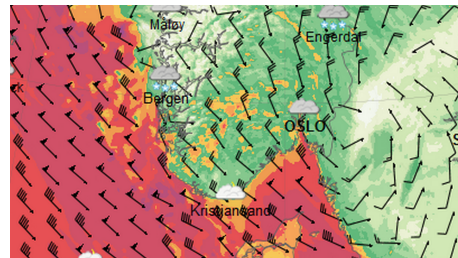
C. N. Yang (1922 -) and Robert Mills (1927 - 1999)
at Stony Brook in 1999.

Karen Uhlenbeck så på denne problemstillingen fra et rent matematisk ståsted. Et foredrag av Michael Atiyah trigget Uhlenbeck sin interesse for gauge-teori og førte til at hun ble en pioner i studiet av Yang-Mills-likninger i et rigorøst matematisk perspektiv. Hennes arbeider ble grunnlaget for all senere forskning innen gauge-teori.

Gauge-teori er vanligvis betraktet som et begrep lånt fra fysikk, men feltet har også et klart matematisk innhold. En gauge kan betraktes som et valg

av referansesystem. En gauge-transform beskriver hvordan vi endrer referansesystem, og en gauge-teori modellerer et fysisk eller matematisk system som normalt vil være gauge-invariant, det vil si at det dreier seg om størrelser som forblir uendret ved gauge-transformasjoner.

Som et eksempel kan vi se på sirkel-bunten på en kuleflate S . I hvert punkt $x \in S$ på kuleflaten identifiserer vi mengden av alle retninger ved hjelp av en standard sirkel S^1 . For å kunne sette mål på en retning, må vi imidlertid velge en orientering og en referanselinje. Et godt valg kunne være rett nord som referanselinje og orientering mot klokka. Men et annet valg ville kunne fungere like bra. Sirkelen av retninger i et punkt x på kuleflaten kaller vi C_x . Familien $C_X = \{C_x\}_{x \in X}$ av alle sirkler av retninger i alle punkter på kuleflaten er det vi kaller sirkelbunten. Det å spesifisere en retning i hvert punkt kalles en seksjon av bunten. Hvis kuleflaten er jorda og retningene er vindretninger, så vil en seksjon s av sirkelbunten gi et globalt vindretningskart.



For å kunne gi en forståelig værmelding er det nødvendig at vi har en omforent valg av referansesystem i hvert punkt på jordoverflaten, vi må altså velge en gauge for sirkelbunten. En angivelse av vindretning ved et vinkelmål eller mer tradisjonelt som SSV er kun nyttig for oss dersom vi er enige om referansesystemet, men vinden selv er uavhengig av valg av gauge.

Et eksempel på gauge-invarians i fysikk er elektromagnetisme, modellert ved Maxwells likninger. Hvis $\mathbf{E}$ er et elektrisk felt, $\mathbf{B}$ et magnetfelt, ϕ et elektrisk potensial og $\mathbf{A}$ et vektorpotensial, så har vi relasjonene

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}$$



Ved å bruke det (rent matematisk) formelle faktum at

$$\nabla \times \nabla = 0$$

og at

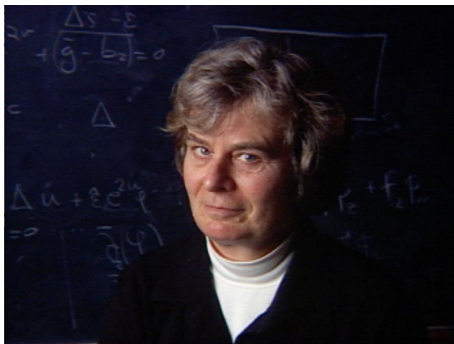
$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla f = \nabla \frac{\partial f}{\partial t}$$

ser vi at substitusjonen (gauge-transformasjonen)

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla f$$

$$\phi \mapsto \phi - \frac{\partial f}{\partial t}$$

for en to ganger deriverbar funksjon f ikke endrer likningene. Det betyr at Maxwells likninger er gauge-invariant under den gitte gauge-transformasjonen.



Karen Uhlenbeck, vinner av Abelprisen 2019